Ioan-Ioviţ Popescu Florea Uliu

# OPTICĂ GEOMETRICĂ

**Descrierea CIP a Bibliotecii Naționale**
**POPESCU, IOAN-IOVIȚ**
**ULIU, FLOREA**
**OPTICĂ GEOMETRICĂ /**
Ioan-Ioviț Popescu, Florea Uliu, Editura Universitaria-Craiova, 2006
25,7 cm
212 pagini
Bibliografie
Editura Universitaria - Craiova
ISBN 973-742-283-X
978-973-742-283-5
535.31

Referenți științifici:

Prof.univ.dr. **NICOLAE AVRAM**, Facultatea de Fizică
Universitatea de Vest din Timișoara;
Prof.univ.dr. **IOAN M. POPESCU**, Catedra de Fizică,
Universitatea Politehnică din București.

**Ioan-Ioviţ Popescu** **Florea Uliu**

# OPTICĂ GEOMETRICĂ

**Editura UNIVERSITARIA**

**CRAIOVA**

**2006**

Editura UNIVERSITARIA
cod postal 200177, str. Brestei, nr.146
jud. Dolj, România
Tel./Fax:+40 251 598 054

Corectura: Florea Uliu
Bun de tipar:28.02.2006
Apărut: martie 2006

Coperta: ing. Titu Radu
Tehnoredactare computerizată:
tehn. Teodora Elena Radu şi ing. Titu Radu
Desene: tehn. Paula Costea

Printed in Romania

# C U P R I N S

# C O N T E N T S

# P R E F A Ț Ă

În mod tradițional *Optica*, adică știința referitoare la fenomenele luminoase, se împarte în două părți: *Optica geometrică* și *Optica fizică*. La rândul său, aceasta din urmă, se subdivide în *Optica ondulatorie* și *Optica cuantică*, după cum luminii îi este atribuită o natură ondulatorie, de undă electromagnetică transversală, respectiv o natură corpuscular-fotonică.

În *Optica geometrică (OG)* se studiază doar acele fenomene fundamentale (și aplicațiile lor) pentru care nu este importantă și definitorie natura luminii. De aceea, uneori, se afirmă că OG este mai degrabă o *"geometrie fizică"* fundamentată pe legile fenomenelor de reflexie și refracție.

Această parte a *Opticii* are la bază trei principii, considerate în tratatele clasice de specialitate ca niște axiome: principiul propagării rectilinii a luminii (în medii omogene), principiul independenței razelor de lumină și principiul reversibilității drumului acestor raze. Lucrarea noastră așează însă la baza OG un alt fundament, justificat de natura fizică a luminii, anume *ecuația eiconalului* –din care se deduc atât *ecuația razelor de lumină (ERL)* cât și principiile reversibilității și independenței lor. Apoi, demonstrând echivalența dintre ERL și formularea variațională a lui Fermat (referitoare la staționaritatea timpului de propagare sau a drumului optic), se deduc legile reflexiei și refracției luminii și se fundamentează analogia opto-mecanică, construindu-se lagrangeanul și hamiltonianul optic. In acest fel, OG (teoretică și aplicativă) se poate dezvolta cvasi-independent, ca o parte distinctă a *Opticii*.

Cartea pe care tocmai ați deschis-o are scop formativ și este gândită ca un manual pentru uzul studenților de la specializările de fizică, fizică-informatică, fizică tehnologică sau fizică medicală, dar și de la alte specializări inginerești (opto-mecanică, opto-electronică) sau medicale (optometrie, oftalmologie). Ne-am străduit ca, în fiecare capitol, să corelăm în mod armonios aspectele clasice, perene, cu cele moderne, de mare actualitate. De pildă, în primul capitol, studiul sistemelor centrate începe cu dioptrul sferic, tratat clasic, pentru a continua cu formalismul modern al matricei de transfer, aplicat unor sisteme din ce în ce mai complexe. Apoi, delicatele probleme ale aberațiilor și ale corectării lor se bucura de o tratare unitară. O atenție specială se acordă mediilor neomogene cu structură stratificată (cilindrică, sferică, planară), atât de importante în prezent pentru aplicațiile din domeniul opticii fibrelor (comunicațiile optice) și din optica integrată.

Pentru a întregi cultura științifică a cititorului, cartea conține o semnificativă Anexă referitoare la momentele de majoră importanță din istoria OG și la "actorii" principali de pe această impresionantă "scenă". Cartea se încheie cu o selecție de probleme de OG (unele clasice, altele moderne), cu indicații, răspunsuri sau rezolvări.

Autorii își exprimă speranța că, la începutul mileniului trei, când așa-numita*"revoluție a imaginilor*", începută în a doua jumătate a secolului 20 (după descoperirea laserilor) continuă, cartea de OG pe care o propun tinerilor cititori va fi bine primită și le va fi utilă pentru inițierea și/sau perfecționarea în profesiunea de fizician (sau inginer) optician.

Nu putem încheia fără a adresa multumirile noastre Editurii UNIVERSITARIA a Universității din Craiova care s-a îngrijit de apariția cărții în cele mai bune condiții.

București, Craiova
Martie 2006 — Autorii

# P R E F A C E

Traditionally, *Optics*, that is the science of light phenomena**,** splits in two: *Geometrical Optics* and *Physical Optics.* In its turn, the latter is subdivided into *Wave Optics* and *Quantum Optics*, depending on the regarded nature of light: either a transversal electromagnetic (vectorial) wave, or a stream of quantum particles called photons.

*Geometrical Optics (GO)* studies only those fundamental phenomena (and their applications) for which the nature of light is irrelevant. That is why, sometimes, GO is considered to be rather a „*physical geometry*” based on the laws of reflection and refraction phenomena.

This part of *Optics* is based on three principles, thought to be axiomatic in the classical speciality literature: the principle of straight propagation of light in homogeneous media, the principle of light beams independence and the principle of beams path reversibility. Our book places GO on another foundation, justified by the physical nature of light, that is *the eikonal equation*-from which we can deduce both the equation of light rays (LRE) and the principles of their reversibility and independence. Then, by demonstrating the equivalence between LRE and the variational formulation of Fermat (the principle of the shortest optical path or of the least time), we can deduce the laws of light reflection and refraction and we can also argue the optical-mechanical analogy (by constructing the optical lagrangean and hamiltonian). Thus GO (theoretical and applied) can develop quasi-independently, as a distinct part of *Optics*.

The present book has a formative goal and is meant for the usage of the students specializing in physics (teaching, computational, technological, medical) and also in mechanical optics or electronic optics. It is equally useful in medical fields related to physics (optometry and ophtalmology).

At the level of each chapter we have tried to harmoniously corelate the classical, permanently-valid, aspects with those modern and of present interest. For instance, in the first chapter, the study of the centered systems starts with the spherical refracting surface, analysed from the classical perspective, then continues with the modern formalism of the transfer matrix, applied to more and more complex systems. The debated problems of the aberrations and their corrections (second chapter) are dealt with in an integrated manner. Particular attention is given to non-homogeneous media with stratified structure (the so-called graded-index waveguides), so important nowadays in the fibre optics field applications (optical communications) and also in integrated optics.

For the reader’s better understanding, the volume also contains an appendix comprising informations about the moments of major importance in the history of GO and also about the main „actors” on this impressive „stage” . The book ends with a selection of GO problems (some classical, other modern ones) ,with indications, answers or solutions.

At the beginning of the third milenium, when the so-called „image revolution” , started in the second half of the 20-th century (after laser discovery), continues, the authors hope that this GO volume, addressed to students, will be well received and will prove useful as an introduction in the profession of physicist or engineer specialized in Optics and equally as an instrument of continuous professional improvement.

We can’t end without expressing our thanks to Craiova „**Universitaria”** Press, which published the book in the best conditions.

Bucharest,Craiova The Authors
Mart, 2006

# Capitolul I
# PRINCIPIILE OPTICII GEOMETRICE

Este bine-cunoscut faptul că, prin intermediul organelor de simț, omul se află într-o legătură permanentă cu mediul în care trăiește și își desfășoară activitatea. Cu ajutorul acestora, el obține întregul ansamblu de informații despre obiectele și fenomenele care îl înconjoară. S-a estimat că aproximativ 90% din informațiile recepționate și prelucrate de ființa umană în timpul vieții sunt dobândite pe cale vizuală. Transportul informațiilor vizuale de la "obiecte" (apropiate - de cele mai multe ori, sau îndepărtate - cum este cazul în observația astronomică) la "observatori" se realizează ultrarapid, prin intermediul unor radiații cunoscute sub denumirea de ***radiații luminoase*** sau, simplu, ***lumină***.

Deși de-a lungul secolelor știința despre lumină, adică ***Optica***, a fost abordată de mari personalități ale științelor naturii - ca Huygens, Newton, Young, Fresnel, Maxwell, Einstein, Feynman, ale filozofiei - ca Descartes, Spinoza, cât și ale artelor - ca Leonardo da Vinci, Goethe, evoluția sa nu a fost rectilinie. Dacă până în primele decenii ale secolului al 20-lea am avut de-a face cu o lungă perioadă de acumulări faptice și conceptuale, adeseori sinuoasă, în ultimele decenii optica a devenit una din cele mai dinamice părți ale fizicii.

În această carte referitoare la fundamenetele opticii, prezentăm problematica ***opticii geometrice***, care are la bază ***cel mai simplu model de propagare a luminii***. După cum se știe, optica geometrică este acea parte a opticii în care propagarea luminii și interacțiunea ei cu mediile materiale se studiază cu ajutorul conceptului de ***rază de lumină***, definit ca o curbă (în particular o linie dreaptă) de-a lungul căreia se propagă energia luminoasă. Acest concept a apărut și s-a fundamentat pe baze fenomenologice, pornindu-se de la observarea umbrelor și penumbrelor precum și a formării imaginii în camera obscură.

***Fasciculele de lumină*** se consideră a fi formate dintr-un "ansamblu" infinit de raze de lumină ***independente,*** fiecare rază având propagare rectilinie în mediile omogene și satisfăcând bine-cunoscutele legi ale reflexiei și refracției la limita de separare a două medii diferite.

Prin poziția importantă pe care o deține în tehnologia optică modernă, atât în proiectarea cât și în realizarea diverselor tipuri de piese, instrumente sau aparate, optica fasciculelor de lumină, adică optica geometrică, este și va rămâne o parte distinctă a Opticii, indiferent de nivelul la care este ea abordată.

În prezent se apreciază că, cu toate limitele sale, optica geometrică posedă trăsăturile caracteristice ale unei teorii științifice, căci ea are o structură logică unitară, conferită de principiul fundamental - ***principiul lui Fermat***, din care derivă toate legile și consecințele supuse verificărilor experimentale.

Deși propagarea luminii poate fi tratată în detaliu cu ajutorul ecuațiilor lui Maxwell și al ecuației corespunzătoare a undelor electromagnetice, multe probleme practice pot fi rezolvate mult mai simplu pe baza conceptului de rază de lumină și a legilor opticii geometrice. Așa cum vom arăta în continuare, optica geometrică, sau optica razelor de lumină, reprezintă o aproximație a opticii ondulatorii pentru lungimi de undă $\lambda$ foarte mici (teoretic pentru $\lambda \to 0$) în comparație cu dimensiunile obiectelor (obstacolelor) care limitează fasciculele de lumină. În această aproximație, energia se propagă de-a lungul razelor de lumină, definite ca familia de traiectorii normale pe suprafețele de undă. La rândul lor, suprafețele de undă sunt definite ca suprafețele de fază constantă.

Remarcăm că o rază de lumină, ca o traiectorie a unui punct matematic în spațiu, nu reprezintă decât o abstracție geometrică și nu este observabilă fizic. Într-adevăr, în realitate, dacă încercăm să izolăm o singură rază de lumină cu ajutorul unei diafragme de diametru controlabil, vom observa că, sub o anumită limită, în loc să se subțieze, fasciculul se lărgește și devine divergent. Această abatere de la propagarea energiei în lungul razelor geometrice de lumină este de natură ondulatorie și este cauzată de ***difracția*** undelor. Dar, prin însăși restricția aproximației $\lambda \to 0$, difracția undelor nu poate fi descrisă în cadrul opticii geometrice.

Vom începe acest capitol cu deducerea ecuației fundamentale a opticii geometrice (***ecuația eiconanului***) pentru suprafețele de undă și a ecuației asociate pentru razele de lumină.

## *§ 1.1. Ecuația eiconalului și ecuația razei de lumină*

Să considerăm un mediu optic transparent și izotop și ***ecuația scalară a undelor***,

$$\Delta E = \frac{1}{v^2} \cdot \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} \quad , \tag{1}$$

unde $E(\vec{r}, t)$ reprezintă oricare din componentele scalare ale câmpului electromagnetic iar $v(\vec{r}) = c/n(\vec{r})$ este viteza luminii în punctul considerat al mediului de indice de refracție $n(\vec{r})$. Remarcăm că ecuația (1) este valabilă numai dacă variațiile lui n și ale gradientului său pe o lungime de undă sunt neglijabile, condiții ideal îndeplinite în limita opticii geometrice $(\lambda \to 0)$.

În continuare vom considera numai propagarea undelor monocromatice, adică a undelor cu dependență temporală dată de factorul $\exp(-i\omega t)$. În acest caz $\partial^2 E/\partial t^2 = -\omega^2 E$ și ecuația (1) devine ecuația undelor monocromatice (sau ecuația lui Helmholtz)

$$\Delta E + k^2 E = 0 \ , \tag{2}$$

unde $k = \omega/v = 2\pi/\lambda = k_0 n$ și $k_0 = \omega/c = 2\pi/\lambda_0$ sunt modulele vectorilor de undă în mediu, respectiv în vid iar $\lambda = \lambda_0/n$.

Cele mai importante soluții ale ecuației (2) ***în medii omogene*** ($n = const.$) sunt undele plane, cilindrice și sferice. Undele mai complicate pot fi reprezentate ca superpoziții de astfel de unde. Să considerăm mai întâi unda plană monocromatică în reprezentarea complexă, adică soluții de forma

$$E(\vec{r}, t) = E_0 e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)} \quad , \tag{3}$$

unde $E_0$ este o amplitudine constantă, în general complexă, $\vec{k} = k\vec{\tau} = k_0 n\vec{\tau}$ este vectorul de undă (sau de propagare) iar $\vec{\tau}$ este versorul direcției de propagare a undei. Vectorii $\vec{\tau}$, $\vec{k}$ sunt constanți și perpendiculari pe suprafețele de fază constantă care, în acest caz, sunt planele date în orice moment $t$ de ecuația $\vec{k} \cdot \vec{r} = \omega t + const.$ În fig.1 este reprezentată poziția la momente sucesive a planului echifază $\vec{k} \cdot \vec{r} = \omega t$, respectiv $\vec{\tau} \cdot \vec{r} = vt$, corespunzător la zero radiani. Razele de lumină sunt rectilinii, pe direcția $\vec{\tau}$.

***În medii neomogene*** indicele de refracție variază spațial, adică $n = n(\vec{r})$, și expresia (3) nu mai reprezintă o soluție a ecuației undelor. De aceea, vom căuta soluții armonice de formă mai generală

$$E(\vec{r},t) = E_0(\vec{r})e^{i[k_0\phi(\vec{r})-\omega t]} \quad , \quad (4)$$

unde funcția scalară reală $\phi(\vec{r})$, care reprezintă partea spațială a fazei, poartă numele de ***eiconal***. Denumirea a fost introdusă de H. Bruns (1895) și provine din cuvântul grecesc εικων care înseamnă imagine* . Suprafețele de fază constantă sunt descrise în orice moment $t$ de ecuația $k_0\phi(\vec{r}) = \omega t + const.$ , astfel că avem $d\phi = cdt$. În fig. 2 este ilustrată poziția la momente succesive a suprafeței echifază de zero radiani $\phi(\vec{r}) = c \cdot t$ și traiectoriile ortogonale asociate $\nabla\phi$ ale razelor de lumină care, în general, în medii neomogene, sunt curbilinii. Cum vom arăta mai departe, diferența $\phi_2 - \phi_1 = c(t_2 - t_1)$ este sinonimă cu ***drumul optic*** parcurs de razele de lumină între suprafețele de undă considerate și este, evident, proporțională cu diferența de fază $k_0(\phi_2 - \phi_1)$ corespunzătoare.

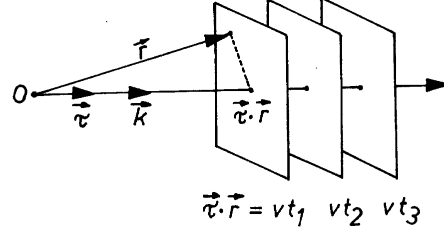



**Fig.1.** Trei poziții succesive pentru planul echifază $\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t = 0$, adică $\vec{\tau}\cdot\vec{r} = vt$.

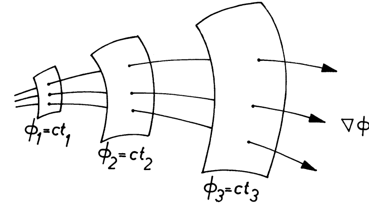



**Fig.2.** Trei poziții succesive pentru suprafața echifază de zero radiani $\phi(\vec{r}) = c \cdot t$ și traiectoriile ortogonale asociate, ale razelor de lumină, într-un mediu neomogen.

Să determinăm ecuația pentru funcția eiconal $\phi = \phi(\vec{r})$ din cerința ca expresia (4) să fie soluție a ecuației undelor. Avem

$$\nabla E = (\nabla E_0 + ik_0 E_0 \nabla\phi)e^{i(k_0\phi - \omega t)} \quad ,$$

$$\Delta E = \{\Delta E_0 + ik_0[2(\nabla E_0)\cdot(\nabla\phi) + E_0\Delta\phi] - k_0^2 E_0(\nabla\phi)^2\}e^{i(k_0\phi-\omega t)} \quad ,$$

astfel că, înlocuind în ecuația undelor (2), obținem

$$\left[n^2 - (\nabla\phi)^2\right]E_0 + \frac{\Delta E_0}{k_0^2} + \frac{i}{k_0}[2(\nabla E_0)\cdot(\nabla\phi) + E_0\Delta\phi] = 0 \quad , \quad (5)$$

sau, scriind separat partea reală și partea imaginară

$$\left[n^2 - (\nabla\phi)^2\right]E_0 + \frac{\Delta E_0}{k_0^2} = 0 \quad , \quad (5')$$

$$2(\nabla E_0)\cdot(\nabla\phi) + E_0\Delta\phi = 0 \ . \quad (5'')$$

Să analizăm mai întâi consecințele ecuației (5') care, în limita opticii geometrice $\lambda_0 \to 0$, sau $k_0 \to \infty$, devine ecuația diferențială neomogenă de ordinul întâi și gradul al doilea

* De aici, prin intermediul slavei vechi (vezi DEX), a rezultat cuvântul românesc ***icoană***.

$$(\nabla\phi)^2 = n^2 \;, \tag{6}$$

care permite determinarea funcției $\phi(\vec{r})$ dacă cunoaștem distribuția $n(\vec{r})$ a indicelui de refracție și condițiile la limită. Aceasta este ***ecuația eiconalului***, dedusă pentru prima dată de A. Sommerfeld și I. Runge (1911), și ***reprezintă ecuația fundamentală a opticii geometrice*** deoarece funcția eiconal $\phi(\vec{r})$ caracterizează complet câmpul optic din punctul de vedere al suprafețelor de undă.

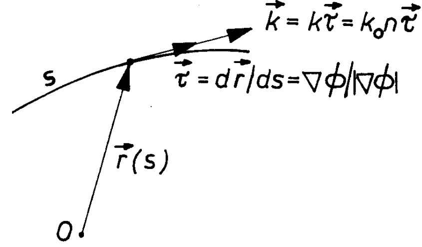



**Fig. 3.** O traiectorie luminoasă, în reprezentare parametrică $\vec{r} = \vec{r}(s)$.

Alternativ, putem descrie câmpul optic prin razele de lumină definite ca familia de traiectorii normale la suprafețele de undă (justificarea acestei definiții va rezulta din analiza ecuației (5")). Considerând traiectoria razelor de lumină în forma parametrică $\vec{r} = \vec{r}(s)$, unde parametrul independent s este lungimea de arc pe traiectorie (fig. 3), versorul care determină în fiecare punct direcția razelor de lumină este

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{r}}{ds} = \frac{\nabla\phi}{|\nabla\phi|}, \tag{7}$$

astfel că ecuația eiconalului se mai poate scrie în următoarele forme echivalente

$$|\nabla\phi| = n \qquad \text{sau} \qquad \frac{d\phi}{ds} = n \;, \tag{8}$$

$$\nabla\phi = n\vec{\tau}, \tag{9}$$

$$\nabla \times (n\vec{\tau}) = 0, \tag{10}$$

$$\nabla \times \vec{k} = 0, \tag{11}$$

unde $\vec{k} \overset{def}{=} k_0 n\vec{\tau}$ este vectorul de undă local.

Remarcăm că integrarea grafică a ecuației eiconalului, ecuația (8), este echivalentă cu ***construcția lui Huygens*** (***Traité de la lumière**, **1692***) a suprafețelor de undă, din aproape în aproape. Într-adevăr, avem

$$d\phi = nds = cdt, \tag{12}$$

de unde rezultă $ds = cdt/n(\vec{r}) = v(\vec{r})dt$. Cu alte cuvinte, considerând punctele unei suprafețe de undă ca surse sincrone de unde sferice secundare, orice suprafață de undă vecină se realizează ca înfășurătoarea acestora (fig. 4). Evident, această construcție este aplicabilă în ambele sensuri de propagare (proprietatea de ***reversibilitate a drumului razelor de lumină***).

Derivând ecuația eiconalului (9) față de parametrul $s$ al traiectoriei razei și ținând cont de ecuația (8) rezultă

$$\frac{d}{ds}(n\vec{\tau}) = \frac{d}{ds}(\nabla\phi) = \nabla\left(\frac{d\phi}{ds}\right) = \nabla n,$$

adică ***ecuația razei de lumină***,

$$\frac{d}{ds}(n\vec{\tau}) = \nabla n \qquad \text{sau} \qquad \frac{d}{ds}\left(n \cdot \frac{d\vec{r}}{ds}\right) = \nabla n \,. \tag{13}$$

În cazul particular al unui mediu omogen avem $n = const.$, $\nabla n = 0$, astfel că ecuația (13) devine $d^2\vec{r}/ds^2 = 0$ și traiectoriile razelor sunt dreptele $\vec{r}(s) = \vec{r}_0 + \vec{\tau}_0 s$, unde $\vec{r}_0$ și $\vec{\tau}_0$ sunt constante de integrare. Evident, aceasta rezultă și direct din ecuația eiconalului (10) care devine $\nabla \times \vec{\tau} = 0$, adică $\vec{\tau}$ este constant. În cazul general al mediilor neomogene, direcția de propagare $\vec{\tau}$ se schimbă în mod continuu de-a lungul razei de lumină conform ecuației razei (13). Deoarece $\vec{\tau}^2 = 1$, avem $\vec{\tau} \cdot (d\vec{\tau}/ds) = 0$ adică versorul $\vec{\tau}$ al direcției de propagare și vectorul de curbură a razei de lumină

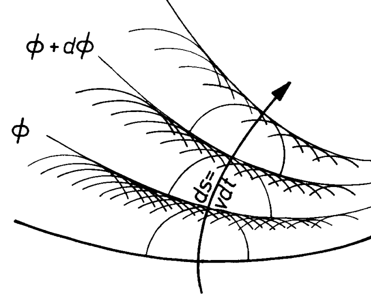



**Fig.4.**Construcția lui Huygens.

$$\vec{K} = \left(\frac{d\vec{\tau}}{ds}\right) = \frac{\vec{\nu}}{\rho} , \tag{14}$$

sunt ortogonali ($\vec{\nu}$ este versorul normalei principale iar $\rho$ raza locală de curbură), fig.5.

Ecuația razei (13) se poate transcrie în forma

$$\nabla n = \frac{d}{ds}(n\vec{\tau}) = \frac{dn}{ds}\vec{\tau} + n\frac{d\vec{\tau}}{ds} = \frac{dn}{ds}\vec{\tau} + \frac{n}{\rho}\vec{\nu} , \tag{15}$$

care evidențiază coplanaritatea vectorilor $\nabla n, \vec{\tau}, \vec{\nu}$ în ***planul osculator*** $(\vec{\tau}, \vec{\nu})$. Înmulțind ecuația (15) scalar cu $\vec{\nu}$ obținem expresia generală a ***curburii razei de lumină***

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\vec{\nu} \cdot \nabla n}{n} = \vec{\nu} \cdot \nabla(\ln n) . \tag{16}$$

Cum întotdeauna $1/\rho \geq 0$, avem succesiv $\vec{\nu} \cdot \nabla n = |\nabla n| \cos\theta \geq 0$, $\cos\theta \geq 0, \theta \leq \frac{\pi}{2}$. Am obținut, astfel ***regula generală*** conform căreia raza de lumină se curbează întotdeauna spre domeniul de refractivitate mai mare. Semnul de egalitate corespunde cazului limită al mediului omogen $(\nabla n = 0)$ când curbura $1/\rho$ este nulă, adică raza de lumină este rectilinie.

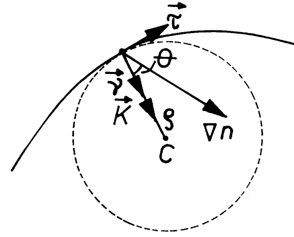



**Fig. 5** Determinarea curburii locale a razei de lumină.

Să analizăm, în aceeași limită, ecuația (5") pe care, cu ajutorul ecuației (9), o transcriem în forma

$$2n\frac{\partial E_0}{\partial s} + E_0 \Delta\phi = 0 . \tag{17}$$

Prin integrare obținem

$$E_0(s) = E_0(0)\exp\left(-\int_0^s \frac{\Delta\phi}{2n} ds\right) , \tag{18}$$

de unde rezultă că amplitudinea câmpului $E_0(s)$ în orice punct al unei raze date depinde de o valoare inițială $E_0(0)$ de pe ***aceeași*** rază, de distribuția indicelui de refracție $n(s)$ în lungul

razei și de laplaceianul drumului optic $\phi(s)-\phi(0)=\int_0^s n(s)ds$, (vezi paragraful 1.2). Ecuațiile opticii geometrice nu intercondiționează valorile câmpului de pe raze diferite, oricât de vecine ar fi acestea, astfel că un fascicul de lumină apare ca un agregat de raze independente (***principiul independenței razelor de lumină***).

Ținând cont, din nou, de ecuația eiconalului $\nabla\phi = n\vec{\tau}$, astfel că $\Delta\phi = \nabla\cdot(\nabla\phi) = \nabla\cdot(n\vec{\tau})$, ecuația (5") mai poate fi scrisă în felul următor

$$2(\nabla E_0)\cdot(n\vec{\tau}) + E_0\nabla\cdot(n\vec{\tau}) = 0 \quad , \tag{19}$$

sau

$$\nabla\cdot\left(E_0^2 n\vec{\tau}\right) = 0 \ , \tag{20}$$

adică sub forma ecuației de continuitate $\nabla\cdot\vec{j}=0$ pentru un fluid incomprensibil staționar cu densitatea de curent $\vec{j}\sim E_0^2 n\vec{\tau}\sim E_0^2\vec{k}$. Vectorul $\vec{j}$ este analogul vectorului Poynting $\vec{\mathbf{S}}$ din teoria electromagnetică și reprezintă densitatea curentului de energie în câmpul optic considerat de optica geometrică. Din aceste considerații rezultă un concept fundamental al opticii geometrice, anume cel conform căruia energia luminoasă se propagă de-a lungul razelor de lumină prin tuburile de linii de curent $\vec{j}$ .

Ca și în cazul fluidelor, notând cu $\sigma$ aria secțiunii transversale a unui fascicul subțire de raze de lumină (tub subțire de linii de curent) conform ecuației (20) rezultă că mărimea $E_0^2 n\sigma$ =const. de-a lungul fasciculului (tubului).

După toate aceste considerente strict teoretice, vom prezenta modul în care putem realiza ***practic*** un fascicul de raze luminoase izolate. Evident, acest lucru presupune introducerea unei diafragme în drumul unei unde luminoase spațial extinse, de forma (4), cu $\vec{r}$ arbitrar. Dacă vrem ca razele din fascicul să îndeplinească condițiile de valabilitate ale ecuației eiconalului (lungime de undă $\lambda_0$ mică și amplitudinea $E_0(\vec{r})$ să nu varieze prea repede în spațiu, astfel încât să fie satisfăcută inegalitatea $|\Delta E_0/E_0k_0^2| = (\lambda_0^2/4\pi^2)\cdot|\Delta E_0/E_0| << n^2$ ; pentru aceasta este suficient ca $|\lambda_0\partial E_0/\partial x| << E_0$ , etc. ) este necesar ca această diafragmă să nu fie prea îngustă iar fasciculul obținut să nu fie prea lung. Într-adevăr, pe marginile diafragmei și pe suprafața laterală a fasciculului obținut prin diafragmare, amplitudinea $E_0(\vec{r})$ variază puternic și, din această cauză, condițiile specificate mai sus (în paranteză) sunt violate; prin urmare, se produce difracția luminii care lărgește mult deschiderea fasciculului. Efectele de difracție sunt nesemnificative dacă diafragma este largă și dacă fasciculul luminos este scurt. În teoria difracției se demonstrează că ecuația eiconalului poate fi încă utilizată pe o distanță $s << D^2/\lambda_0 \equiv s_0$ , unde $D$ este lărgimea cea mai mică a difragmei. De exemplu, pentru $\lambda_0 = 500\,nm$ și o diafragmă circulară cu diametrul $D = 1mm$, obținem $s_0 = 2m$ ; aceasta înseamnă că, dincolo de diafragmă, pe distanțe de ordinul câtorva centimetri, putem vorbi încă de un fascicul de raze de lumină independente, pentru care ecuațiile (5") și (9) rămân valabile. Când $D\to\infty$ sau $\lambda_0\to 0$, avem $s_0\to\infty$ și aproximația opticii geometrice este valabilă pe distanțe $s$ oricât de mari. Din păcate, în practică întâlnim foarte rar astfel de situații. De aceea, optica geometrică este numai "o primă aproximație" a opticii.

## *§ 1. 2. Principiul lui Fermat și formalismul langrageian*

Ecuația eiconalului și ecuația razei de lumină descriu comportarea ***locală*** a suprafețelor de undă, respectiv a traiectoriilor razelor de lumină. În multe situații este însă convenabil să considerăm proprietățile integrale (globale) corespunzătoare.

Să considerăm mai întâi ***teorema invariantului integral al lui Lagrange*** conform căreia integrala vectorului $n\vec{\tau}$, ca și a vectorului de undă $\vec{k} = k_0 n\vec{\tau}$ , între două puncte $P_1, P_2$ oarecare ale câmpului optic nu depinde de drum, adică

$$\int_{P_1}^{P_2} n\vec{\tau} \cdot d\vec{r} = \phi(P_2) - \phi(P_1) \quad , \qquad (21)$$

deoarece, conform ecuației eiconalului (9), $n\vec{\tau} \cdot d\vec{r} = \nabla\phi \cdot d\vec{r} = d\phi$.

Alternativ, dacă ecuația locală (10) se integrează pe o suprafață ***oarecare*** $\Sigma_C$ , care se sprijină pe un contur închis **C**, și se utilizează teorema lui Stokes, se obține ***legea globală***

$$\iint_{\Sigma_C} \nabla \times (n\vec{\tau}) \cdot d\vec{A} = \oint_C n\vec{\tau} \cdot d\vec{r} = 0 \quad . \qquad (22)$$

Teorema integrală de mai sus rămâne valabilă și în cazul în care conturul de integrare intersectează una sau mai multe suprafețe de discontinuitate ale indicelui de refracție. Desigur, aceste suprafețe trebuie considerate ca regiuni de tranziție relativ rapide dar continue ale indicelui de refracție, în care ecuația locală a eiconalului își păstrează valabilitatea. Ca aplicație, să considerăm o astfel de suprafață de separare intersectată de un contur închis oarecare $C = C_1 + C_2 + C_{12}$ , unde contururile $C_1$ și $C_2$ se găsesc de o parte și de alta a suprafeței separatoare $\Sigma$ iar conturul infinitezimal $C_{12}$ intersectează efectiv această suprafață (fig. 6). Conform ecuației (22) avem

$$\oint_C n\vec{\tau} \cdot d\vec{r} = \oint_{C_1} n_1\vec{\tau}_1 \cdot d\vec{r}_1 + \oint_{C_2} n_2\vec{\tau}_2 \cdot d\vec{r}_2 + \oint_{C_{12}} (n_1\vec{\tau}_1 - n_2\vec{\tau}_2) d\vec{r}_2 = 0 \quad . \qquad (23)$$

Dar, integralele de pe contururile închise $C_1$ și $C_2$ sunt nule, astfel că rezultă proprietatea

$$(n_1\vec{\tau}_1 - n_2\vec{\tau}_2) \cdot d\vec{r}_2 = 0 \quad , \qquad (24')$$

sau echivalent,

$$(\vec{k}_1 - \vec{k}_2) \cdot d\vec{r}_2 = 0 \quad , \qquad (24'')$$

valabilă în fiecare punct de trecere a razelor de lumină prin suprafața de discontinuitate $\Sigma$. Întrucât elementul de drum $d\vec{r}_2$ din ecuațiile (24’), (24") reprezintă orice deplasare infinitezimală pe suprafața $\Sigma$, aceste ecuații sunt echivalente cu condiția de continuitate a componentei tangențiale a vectorilor $n\vec{\tau}$ respectiv $\vec{k}$. Măsurând unghiul de incidență $\theta_1$ și de refracție $\theta_2$ față de normala la suprafață în punctul de incidență a razei (fig.7), această condiție este sinonimă cu ***legea de refracție Snell-Descartes***

$$n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2 \quad . \qquad (25)$$

Să aplicăm în continuare, teorema invariantului integral al lui Lagrange, adică ecuația (21), pentru cazul în care conturul de integrare este chiar traiectoria unei raze de lumină astfel că $n\vec{\tau}\cdot d\vec{r} = n\vec{\tau}\cdot\vec{\tau}ds = n\cdot ds$ În acest caz, integrala (21) între două puncte $P_1$, $P_2$ oarecare ale razei, notată cu $[P_1P_2]$, poartă numele de ***drum optic*** și are următoarele expresii echivalente

$$[P_1P_2] \overset{def}{=} \int_{P_1}^{P_2} nds = \lambda_0 \int_{P_1}^{P_2} \frac{ds}{\lambda} = c(t_2 - t_1) = \phi_2 - \phi_1 \quad , \qquad (26)$$

unde am folosit expresia $n = k/k_0 = \lambda_0/\lambda$ și relația $nds = cdt$, adică ecuația (12). Cu alte cuvinte, ***drumul optic între două puncte ale unei raze de lumină este proporțional cu numărul de lungimi de undă (căci $ds/\lambda = dN$), cu timpul de propagare a luminii, respectiv cu diferența de fază între oscilațiile armonice ale câmpului optic în punctele considerate.***

Conceptul de drum optic permite să formulăm următoarea proprietate generală, denumită ***principiul egalității drumurilor optice*** (sau ***teorema Malus-Dupin***), conform căreia, indiferent de mediile optice și de suprafețele de discontinuitate străbătute, ***drumul optic între două suprafețe de undă oarecare este același pentru toate razele de lumină.*** Valabilitatea

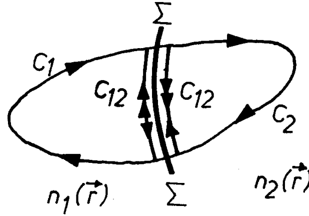



**Fig. 6.** O suprafață de separare a două medii optice diferite (Σ) și un contur de integrare, închis, oarecare ($C=C_1+C_2+C_{12}$).

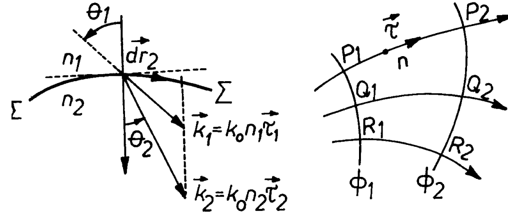



**Fig. 7.** Refracția luminii și legea sa fundamentală (interpretare geometrică).
**Fig. 8.** Principiul egalității drumurilor optice (teorema Malus-Dupin).

acestei asertiuni rezultă din aplicarea ecuației (26) la toate razele fasciculului de lumină considerat, adică (vezi fig. 8)

$$[P_1P_2] = [Q_1Q_2] = [R_1R_2] = ... = \phi_2 - \phi_1 \quad . \qquad (27)$$

Acest principiu ține seama în mod automat de legea de refracție Snell-Descartes la suprafațele de discontinuitate. Astfel, să considerăm un fascicul subțire de raze de lumină, cuprins între razele vecine $P_1PP_2$ și $Q_1QQ_2$, care trec prin suprafața de separare Σ dintre două medii omogene $n_1$ și $n_2$ (vezi fig.9). În virtutea principiului egalității drumurilor optice avem

$$[P_1PP_2] = [Q_1QQ_2],$$

adică

$$\underline{n_1 \cdot P_1P'} + n_1 \cdot P'P + \underline{\underline{n_2 \cdot PP_2}} = \underline{n_1 \cdot Q_1Q} + n_2 \cdot QQ' + \underline{\underline{n_2 \cdot Q'Q_2}} \,,$$

unde, prin construcție, termenii subliniați se compensează. Cum $P'P = PQ \cdot \sin\theta_1$ și $QQ' = PQ \cdot \sin\theta_2$, din ultima relație rezultă astfel legea de refracție $n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2$, adică ecuația (25).

Principiul egalității drumurilor optice justifică, de asemenea, și construcția lui Huygens a suprafețelor de undă succesive pornind de la una dintre ele. Astfel, ca și în exemplul anterior, să considerăm suprafața de separare $\Sigma$ dintre două medii omogene $n_1$ și $n_2$ (vezi fig. 10). Fiind dată suprafața de undă $\phi_1$ în mediul $n_1$, se cere să construim geometric suprafața de undă $\phi_2$ în mediul $n_2$, care este separată de suprafața $\phi_1$ prin drumul optic $\phi_2 - \phi_1 = const.$ Pentru aceasta, în diversele puncte $P_1, Q_1, R_1, ...$ ale suprafeței $\phi_1$ ridicăm normalele (razele de lumină) care intersectează suprafața de separare $\Sigma$ în puncele corespunzătoare $P, Q, R, ...$. În continuare, trasăm sferele $S_P, S_Q, S_R ...$ cu centrele în punctele respective $P, Q, R, ...$ și razele $s_{2p}, s_{2q}, s_{2r}, ...$ date de condiția de egalitate a drumurilor optice

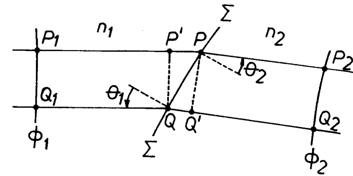


**Fig. 9.** Deducerea legii (25) a refracției din teorema Malus-Dupin.

$$n_1 s_{1p} + n_2 s_{2p} = n_1 s_{1q} + n_2 s_{2q} = n_1 s_{1r} + n_2 s_{2r} = ... = \phi_2 - \phi_1 \quad .$$

Evident, înfășurătoarea acestor sfere reprezintă suprafața de undă $\phi_2$ căutată iar punctele de tangență $P_2, Q_2, R_2, ...$ sunt totodată și punctele de intersecție ale razelor de lumină $P_1PP_2$, $Q_1QQ_2$, $R_1RR_2$, ... cu această suprafață.

În continuare, vom arăta că ecuațiile opticii geometrice pot fi deduse dintr-un singur principiu variațional (***principiul lui Fermat***). Astfel, cum se arată în fig. 11, să considerăm două traiectorii care trec prin aceleași puncte $P_1$ și $P_2$ și anume o ***traiectorie reală***, efectiv aleasă de raza de lumină, și o ***traiectorie virtuală vecină***, pe care raza de lumină nu o parcurge efectiv. Evident, există o infinitate de traiectorii virtuale vecine cu o rază de lumină reală dată. Variația drumului optic între cele două traiectorii considerate se scrie

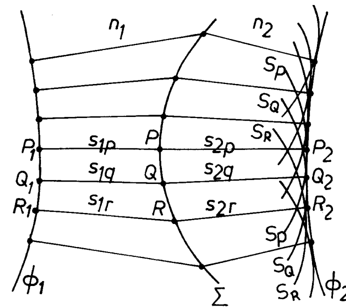


**Fig. 10.** Justificarea construcției lui Huygens pe baza teoremei Malus-Dupin.

$$\delta \int_{P_1}^{P_2} n ds = \int_{P_1}^{P_2} (\delta n) ds + \int_{P_1}^{P_2} n \delta(ds) \quad . \tag{28}$$

Întru-cât traiectoriile sunt vecine

$$\delta n = \delta \vec{r} \cdot \nabla n \, . \tag{29}$$

De asemenea, avem succesiv identitățile $(ds)^2 = (d\vec{r})^2$, $\delta(ds)^2 = \delta(d\vec{r})^2$, deci $ds \cdot \delta(ds) = d\vec{r} \cdot \delta(d\vec{r})$ sau ținând cont că operatorii $d$ și $\delta$ comută

$$\delta(ds) = \frac{d\vec{r}}{ds} \cdot \delta(d\vec{r}) = \vec{\tau} \cdot d(\delta\vec{r}) \,. \qquad (30)$$

Introducând expresiile (29) și (30) în ecuația (28) avem

$$\delta \int_{P_1}^{P_2} nds = \int_{P_1}^{P_2} (\delta\vec{r} \cdot \nabla n) ds + \int_{P_1}^{P_2} n\vec{\tau} \cdot d(\delta\vec{r}) \quad . \quad (31)$$

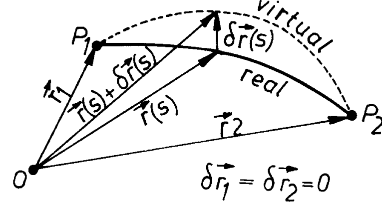



**Fig. 11.** O traiectorie luminoasă reală și o traiectorie virtuală vecină (referitor la formularea principiului lui Fermat).

Integrând prin părți a doua integrală din membrul drept rezultă

$$\int_{P_1}^{P_2} n\vec{\tau} \cdot d(\delta\vec{r}) = n\vec{\tau} \cdot \delta\vec{r} \Big|_{P_1}^{P_2} - \int_{P_1}^{P_2} \delta\vec{r} \cdot d(n\vec{\tau}) \quad , \qquad (32)$$

astfel că, finalmente, ecuația (31) se scrie

$$\delta \int_{P_1}^{P_2} nds = n_2\vec{\tau}_2 \cdot \delta\vec{r}_2 - n_1\vec{\tau}_1 \cdot \delta\vec{r}_1 + \int_{P_1}^{P_2} \left[ \nabla n - \frac{d}{ds}(n\vec{\tau}) \right] \cdot \delta\vec{r}(s) ds \quad . \qquad (33)$$

Dar punctele $P_1, P_2$ de la capete sunt presupuse fixe, adică $\delta\vec{r}_1 = \delta\vec{r}_2 = 0$, iar variația $\delta\vec{r}(s)$ este arbitrară. Rezultă astfel că ecuația razei de lumină, adică $\frac{d}{ds}(n\vec{\tau}) = \nabla n$ și, implicit, ecuația eiconalului sunt matematic echivalente cu formularea variațională

$$\delta \int_{P_1}^{P_2} nds = 0 \quad . \qquad (34)$$

De aici rezultă ***principiul lui Fermat*** (1657) conform căruia ***traiectoria reală a razei de lumină care unește două puncte $P_1, P_2$ oarecare este determinată de condiția ca drumul optic corespunzător să fie staționar (extremal în sensul calculului variațional)***, adică

$$\int_{P_1}^{P_2} nds = \text{ staționar (extremal)}, \qquad (35)$$

unde staționar (extremal) înseamnă minim, maxim sau constant. Cu alte cuvinte, traiectoria reală a razei de lumină reprezintă o ***traiectorie extremală a drumului optic***. Evident, această traiectorie este aceeași indiferent de sensul de propagare a luminii (proprietatea de ***reversibilitate a razelor de lumină***). În particular, în medii omogene ($n$ =constant ), lumina se propagă pe drumul geometric extremal

$$\int_{P_1}^{P_2} ds = \text{constant=staționar} \quad \text{(extremal)} \tag{36}$$

adică în linie dreaptă (minim).

Menționăm că, din punct de vedere istoric, optica geometrică s-a dezvoltat ca teoria razelor de lumină, definite direct prin principiul lui Fermat, adică a traiectoriilor pe care drumul optic este staționar (extremal). Primul succes al principiului lui Fermat l-a constituit, desigur, deducerea legilor deja cunoscute ale reflexiei și refracției. Să deducem și noi, pe această cale, legea de refracție pe o suprafață $\Sigma$, de separare dintre două medii omogene $n_1, n_2$ (vezi fig. 12). Conform principiului, pe traiectoria reală care trece prin punctele $P_1, P_2$ date, avem

$$n_1 s_1 + n_2 s_2 = \text{staționar} \quad \text{(extremal).} \tag{37}$$

La o deplasare virtuală $d\vec{s}_1$ a punctului de incidență a razei de lumină pe suprafața $\Sigma$ rezultă deci

$$n_1 \delta s_1 + n_2 \delta s_2 = 0 \quad . \tag{38}$$

Dar $s^2 = \vec{s}^{\,2}$, $s\delta s = \vec{s} \cdot d\vec{s}$, $\delta s = \frac{\vec{s}}{s} d\vec{s} = \vec{\tau} \cdot d\vec{s}$, și, $\overrightarrow{P_1 P_2} = \vec{s}_1 + \vec{s}_2 = \overrightarrow{constant}$ adică

$$d\vec{s}_1 = -d\vec{s}_2$$

astfel că

$$(n_1 \vec{\tau}_1 - n_2 \vec{\tau}_2) \cdot d\vec{s}_1 = 0 \tag{39}$$

Cum deplasarea virtuală pe suprafața este arbitrară, ecuația (39) este echivalentă cu condiția de continuitate a componentei tangențiale a vectorului , adică cu ***legea de refracție Snell-Descartes*** . În mod similar, considerând punctele în același mediu, se deduce și legea de reflexie.

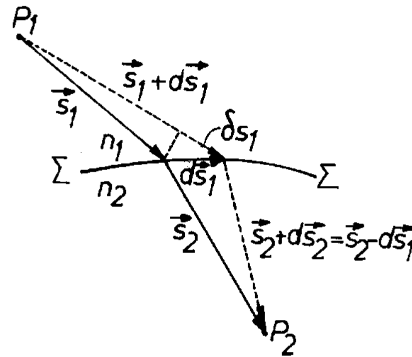



**Fig. 12.** Deducerea legilor refracției din principiul lui Fermat.

Modul de a deduce legile naturii dintr-un principiu variațional integral, exprimat pentru prima dată prin principiul lui Fermat în optica geometrică, s-a dovedit a fi mult mai general și a dominat întreaga evoluție ulterioară a teoriilor fizicii. Astfel, de exemplu, să considerăm legea a doua a lui Newton

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = -\nabla U \tag{40}$$

prin care mecanica clasică descrie mișcarea unui punct material de masă $m$ și viteză $\vec{v}$ într-un

câmp de forţă $\vec{F} = -\nabla U$ determinat de energia potenţială $U(\vec{r})$. Din legea conservării energiei

$$\frac{1}{2}mv^2 + U(\vec{r}) = E \ , \qquad (41)$$

unde E este energia totală, prin operaţia de gradient rezultă

$$mv \cdot \nabla v = -\nabla U \ , \qquad (42)$$

astfel că ecuaţia (40) se mai scrie

$$\frac{1}{v}\frac{d\vec{v}}{dt} = \nabla v \ . \qquad (43)$$

Ţinând cont că $ds = vdt$ şi introducând versorul $\vec{\tau} = \frac{\vec{v}}{v}$ al tangentei la traiectorie, din ecuaţia (43) obţinem ***ecuaţia traiectoriei particulei*** în forma

$$\frac{d}{ds}(v\vec{\tau}) = \nabla v \ . \qquad (44)$$

Această ecuaţie reprezintă analogul din mecanica clasică al ecuaţiei razei de lumină, ecuaţia (13), locul indicelui de refracţie $n(\vec{r}) = c/v(\vec{r})$ fiind luat acum de viteza particulei $v(\vec{r}) = [(2/m) \cdot (E - U(\vec{r}))]^{1/2}$. În mod corespunzător, analogul principiului lui Fermat, ecuaţia (35), se scrie deci

$$\int_{P_1}^{P_2} vds \ = \text{staţionar (extremal)} \qquad (45)$$

şi este cunoscut sub numele de ***principiul Maupertuis-Euler*** (1744). Aşa s-a născut ***analogia opto-mecanică*** dintre problema trasării razelor de lumină într-un mediu de indice de refracţie $n(\vec{r})$ şi aceea a determinării traiectoriilor particulelor într-un câmp de forţe descris de funcţia de energie potenţială $U(\vec{r})$. Această analogie a fost fundamentată mai departe de Hamilton, care a aplicat calculul variaţional atât integralei drumului optic din ecuaţia (35) pentru optica geometrică (***Theory of systems of rays***, 1828-1837), cât şi integralei "acţiunii" din ecuaţia (45) pentru dinamica clasică (***On the application to dynamics of a general mathematical method previously applied to optics***, 1834).

Pentru frumuseţe şi puterea sa de cuprindere, în continuare vom prezenta formularea lagrangeiană şi hamiltoniană a opticii geometrice. Pentru convenienţă, vom repera traiectoria razei de lumină într-un sistem de coordonate cartezian, trecând de la reprezentarea parametrică $x(s)$, $y(s)$, $z(s)$ la reprezentarea $x(z)$, $y(z)$, $z$ în funcţie de variabila independentă z (fig. 13). Astfel, elementul de lungime pe traiectorie se scrie

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2} \ = (1 + x'^2 + y'^2)^{1/2}dz \qquad , \qquad (46)$$

unde

$$\begin{cases} x' = \dfrac{dx}{dz} = \dfrac{\tau_x}{\tau_z} \ , \\ y' = \dfrac{dy}{dz} = \dfrac{\tau_y}{\tau_z} \ , \end{cases} \qquad (47)$$

iar

$$\begin{cases} \tau_x = \dfrac{dx}{ds} = \cos\alpha\,, \\ \tau_y = \dfrac{dy}{ds} = \cos\beta\,, \\ \tau_z = \dfrac{dz}{ds} = \cos\gamma\,, \end{cases} \tag{48}$$

reprezintă componentele versorului $\vec{\tau} = \dfrac{d\vec{r}}{ds}$ (cosinușii directori ai tangentei la traiectorie). Vom schimba de asemenea variabila de integrare pentru drumul optic de la **s** la **z**, adică

$$[P_1P_2] = \int_{P_1}^{P_2} n(s)ds = \int_{z_1}^{z_2} n\left(\frac{ds}{dz}\right)dz =$$

$$= \int_{z_1}^{z_2} L[x(z), y(z), x'(z), y'(z), z] \cdot dz\,, \quad (49)$$

unde

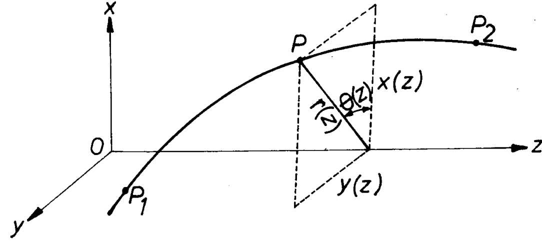



**Fig 13.** Reprezentarea (x,(z), y(z), z) a traiectoriei unei raze luminoase.

$$L(x, y, x', y', z) = n\frac{ds}{dz} = \frac{n}{\tau_z} = \frac{n}{\cos\gamma} = n(x, y, z) \cdot (1 + x'^2 + y'^2)^{1/2} \quad , \tag{50}$$

reprezintă ***lagrangeianul optic.*** Conform principiului lui Fermat, traiectoria reală a razei de lumină trebuie să satisfacă ecuația (34), adică

$$\delta \int_{z_1}^{z_2} L(x, y, x', y', z)dz = 0 \quad . \tag{51}$$

Cum se arată în calculul variațional, condițiile necesare impuse de relația (51) sunt date de ***ecuațiile Euler-Lagrange***

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dz}\left(\dfrac{\partial L}{\partial x'}\right) = \dfrac{\partial L}{\partial x}, \\ \dfrac{d}{dz}\left(\dfrac{\partial L}{\partial y'}\right) = \dfrac{\partial L}{\partial y}. \end{cases} \tag{52}$$

Aceste ecuații reprezintă, de fapt, ecuația razei de lumină, adică ecuația (13)

$$\frac{d}{ds}(n\vec{\tau}) = \nabla n$$

sau, pe componente,

$$\begin{cases} \dfrac{d}{ds}(n\tau_x) = \dfrac{\partial n}{\partial x}, \\ \dfrac{d}{ds}(n\tau_y) = \dfrac{\partial n}{\partial y}, \\ \dfrac{d}{ds}(n\tau_z) = \dfrac{\partial n}{\partial z}. \end{cases} \tag{53}$$

Într-adevăr, derivând expresia lagrangeianului, adică ecuația (50), avem

$$\frac{\partial L}{\partial x'} = \frac{nx'}{(1 + x'^{\,2} + y'^{\,2})^{1/2}} = n\frac{dx}{ds} = n\tau_x \qquad . \qquad (54)$$

Prima ecuație (52) se scrie explicit sub forma

$$\frac{d}{dz}(n\tau_x) = (1 + x'^{\,2} + y'^{\,2})^{1/2} \cdot \frac{\partial n}{\partial x} \qquad \text{sau} \qquad \frac{d}{ds}(n\tau_x) = \frac{\partial n}{\partial x} \ ,$$

adică este chiar prima ecuație (53). În mod similar, a doua ecuație (52) reprezintă a doua ecuație (53).

Observăm că numai primele două ecuații (53) sunt independente, a treia ecuație rezultând automat din celelalte două și din condiția pur geometrică

$$\vec{\tau}^{\,2} = \tau_x^2 + \tau_y^2 + \tau_z^2 = 1 \quad . \qquad (55)$$

Într-adevăr, înmulțind ecuația (55) cu $dn/ds$, respectiv derivând-o față de $s$ și înmulțind cu $n$, avem

$$\left(\tau_x^2 + \tau_y^2 + \tau_z^2\right) \cdot \frac{dn}{ds} = \frac{\partial n}{\partial x} \cdot \tau_x + \frac{\partial n}{\partial y} \cdot \tau_y + \frac{\partial n}{\partial z} \cdot \tau_z \qquad ,$$

$$\left(\tau_x \frac{d\tau_x}{ds} + \tau_y \frac{d\tau_y}{ds} + \tau_z \frac{d\tau_z}{ds}\right) n = 0 \qquad ,$$

de unde, prin adunare, obținem

$$\tau_x\left[\frac{d}{ds}(n\tau_x) - \frac{\partial n}{\partial x}\right] + \tau_y\left[\frac{d}{ds}(n\tau_y) - \frac{\partial n}{\partial y}\right] + \tau_z\left[\frac{d}{ds}(n\tau_z) - \frac{\partial n}{\partial z}\right] = 0 \qquad . \qquad (56)$$

Evident, a treia ecuație (53) reprezintă o identitate care nu mai aduce nimic nou față de primele două.

De la formalismul lagrangeian, prezentat mai sus, prin ecuațiile (50)-(52), se poate trece la formalismul hamiltonian prin definirea ***momentelor (impulsurilor) canonice optice***

$$\begin{cases} p_x = \dfrac{\partial L}{\partial x'} = n\tau_x \,, \\ p_y = \dfrac{\partial L}{\partial y'} = n\tau_y \,, \end{cases} \qquad (57)$$

și a ***hamiltonianului optic***

$$H = p_x x' + p_y y' - L(x, y, x', y', z) = p_x \frac{\tau_x}{\tau_z} + p_y \frac{\tau_y}{\tau_z} - \frac{n}{\tau_z} \qquad . \qquad (58)$$

Înlocuind cosinușii directori prin momente cu ajutorul ecuațiilor (57) și (55) obținem expresia hamiltonianului în funcție de variabilele canonice conjugate $(x, p_x)$, $(y, p_y)$ și de parametrul independent $z$ în forma

$$H(x, y, p_x, p_y, z) = -\left[n^2(x, y, z) - \left(p_x^2 + p_y^2\right)\right]^{1/2} = -n\tau_z = -n\cos\gamma \qquad . \qquad (59)$$

Remarcăm că, în timp ce coordonatele optice $(x, y)$ pot avea orice valoare, domeniul momentelor optice $(p_x, p_y)$ este limitat de condiția

$$p_x^2 + p_y^2 = n^2(\tau_x^2 + \tau_y^2) = n^2(1 - \tau_z^2) = (n \sin\gamma)^2 \le n^2 \quad .$$

În mod corespunzător, avem $|H| \le n$.

Diferențiala totală a hamiltonianului optic (59) ca funcție de coordonate și momente este

$$dH = \frac{\partial H}{\partial x}dx + \frac{\partial H}{\partial y}dy + \frac{\partial H}{\partial p_x}dp_x + \frac{\partial H}{\partial p_y}dp_y + \frac{\partial H}{\partial z}dz \quad . \tag{60}$$

Pe de altă parte, din relația de definiție, ecuația (58), rezultă

$$dH = x'dp_x + \underline{p_x dx'} + y'dp_y + \underline{\underline{p_y dy'}} - \frac{\partial L}{\partial x}dx - \frac{\partial L}{\partial y}dy - \underline{\frac{\partial L}{\partial x'}dx'} - \underline{\underline{\frac{\partial L}{\partial y'}dy'}} - \frac{\partial L}{\partial z}dz \quad , \tag{61}$$

unde termenii subliniați se compensează prin însăși definiția momentelor, ecuația (57). De asemenea, conform ecuațiilor Euler-Lagrange (52), avem

$$\frac{\partial L}{\partial x} = \frac{dp_x}{dz}, \qquad \frac{\partial L}{\partial y} = \frac{dp_y}{dz}, \tag{62}$$

astfel că ecuația (61) se scrie

$$dH = \frac{dx}{dz}dp_x + \frac{dy}{dz}dp_y - \frac{dp_x}{dz}dx - \frac{dp_y}{dz}dy - \frac{\partial L}{\partial z}dz \quad . \tag{63}$$

Identificând cele două expresii (60), (63) ale diferențialei totale dH, rezultă finalmente ecuațiile diferențiale pentru variabilele canonice, denumite ***ecuațiile canonice*** sau ***ecuațiile lui Hamilton***

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dz} = \dfrac{\partial H}{\partial p_x}, & \dfrac{dp_x}{dz} = -\dfrac{\partial H}{\partial x}, \\ \dfrac{dy}{dz} = \dfrac{\partial H}{\partial p_y}, & \dfrac{dp_y}{dz} = -\dfrac{\partial H}{\partial y}, \end{cases} \tag{64}$$

precum și $\partial H/\partial z = -\partial L/\partial z$ . În locul a două ecuații Euler-Lagrange de ordinul al doilea am obținut astfel patru ecuații Hamilton de ordinul întâi. Cunoscând hamiltonianul sistemului, ecuația (59), și specificând condițiile la limită într-un punct $P_0(z_0)$ , integrarea ecuațiilor (64) permite să determinăm starea razei de lumină în orice alt punct $P(z)$, adică poziția $x, y$ și direcția de propagare $p_x = n\tau_x,\ p_y = n\tau_y$ . Pentru interpretarea geometrică este comod să considerăm variabilele canonice în ***spațiul fazelor*** $(x, y, p_x, p_y)$ .

Cititorul poate verifica ușor, utilizând forma (59) a hamiltonianului, că ecuațiile canonice (64) conduc la definițiile (57) și la primele două ecuații din setul (53). Aceasta înseamnă că ansamblul ecuațiilor lui Hamilton este absolut echivalent cu ecuațiile Euler-Lagrange.

Studiul traiectoriilor luminoase poate fi dezvoltat la fel de bine și prin ***metoda Hamilton-Jacobi***. Definind ***acțiunea optică*** $S(x(z), y(z), z)$ prin relația

$$S = \int_{P_1}^{P} L dz = \int_{P_1}^{P} (p_x x' + p_y y' - H) dz, \tag{65}$$

cunoscută din mecanica analitică, în care $P_1$ este un punct fixat, iar $P$ - un punct arbitrar de pe o traiectorie luminoasă reală, exact ca în mecanica analitică, se obține

$$\frac{\partial S}{\partial z} = -H, \ \frac{\partial S}{\partial x} = p_x, \ \frac{\partial S}{\partial y} = p_y. \tag{66}$$

Ținând cont că hamiltonianul $H$ este funcție de variabilele canonic conjugate $(x, p_x)$, $(y, p_y)$ și de $z$, prima ecuație din (66) devine

$$\frac{\partial S}{\partial z} + H(x, y; \frac{\partial S}{\partial x}, \frac{\partial S}{\partial y}; z) = 0 \ . \tag{67}$$

Am obținut astfel ***ecuația Hamilton-Jacobi*** pentru acțiunea optică. Folosind forma concretă (59) a hamiltonianului optic, din ecuația (67) obținem ecuația

$$\frac{\partial S}{\partial z} - \left[ n^2(x, y, z) - \left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 - \left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)^2 \right]^{1/2} = 0 \quad , \tag{68}$$

care se poate scrie imediat sub forma

$$\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial z}\right)^2 = n^2(x, y, z). \tag{68'}$$

Din compararea relației (68') cu ecuația (6) ajungem la concluzia că eiconalul este identic cu acțiunea optică iar ecuația eiconalului este în realitate ecuația Hamilton-Jacobi. În felul acesta "cercul" analogiei opto-mecanice s-a închis.

Cele prezentate în ultima parte a acestui paragraf ne permit să afirmăm că, între optica geometrică și mecanica analitică există o analogie perfectă. În mecanica cuantică ecuația Hamilton-Jacobi (adică ecuația eiconalului) este un caz limită (pentru $h \to 0$ , $h =$ constanta lui Planck) al ecuației lui Schödinger-fundamentală pentru întreaga mecanică cuantică nerelativistă. Prin urmare, mecanica analitică și optica pot fi considerate, în sensul ***principiului de corespondență***, ca niște cazuri particulare ale mecanicii cuantice. Natura duală a luminii (ondulatorie și corpuscular- fotonică) este așadar integrată în natura duală a microobiectelor cuantice.

## *§ 1.3. Condiții generale de stigmatism*

Să considerăm un fascicul conic (homocentric) de raze de lumină emis de o sursă punctuală $P_1$ (fig. 14, a). În general, din infinitatea de raze ale acestui fascicul, numai una singură va trece printr-un alt punct $P_2$, și anume traiectoria extremală care satisface principiul lui Fermat. Pe de altă parte, funcția ideală a instrumentelor optice de format imagini constă în dirijarea fasciculului de raze în așa fel încât fiecărui punct $P_1$ din spațiul obiectului să-i

corespundă un singur punct $P_2$ în spațiul imaginii. Din acest motiv, în continuare ne vor interesa acele cazuri excepționale în care punctele $P_1$ și $P_2$ sunt legate printr-o infinitate de raze (fig. 14, b).

***Stigmatismul*** reprezintă conceptul fundamental al teoriei geometrice a imaginilor optice. Denumirea provine din cuvântul grecesc $\sigma\tau\iota\gamma\mu\alpha$ care înseamnă punct. Prin definiție, un sistem optic este stigmatic sau punctual pentru perechea de puncte $P_1, P_2$ dacă un fascicul conic de raze cu vârful în $P_1$ este transformat într-un fascicul conic de raze cu vârful în $P_2$. Punctul $P_2$ poartă numele de ***imagine stigmatică*** a punctului $P_1$. Evident, dacă schimbăm sensul de propagare a razelor de lumină, punctul $P_1$ reprezintă imaginea stigmatică a punctului $P_2$. Perechea de puncte obiect și imagine astfel definite formează o ***pereche de puncte stigmatice*** sau ***puncte conjugate*** ale sistemului optic considerat. După cum razele de lumină se intersectează efectiv sau numai prin prelungirile lor (rectilinii, în mediile omogene) punctul obiect sau imagine poartă numele de punct ***real***, respectiv ***virtual***.

În general, indiferent de complexitatea formei suprafețelor de undă, în imediata vecinătate a punctelor conjugate ele devin obligatoriu sferice, degenerând în punctele respective. Prin extensia principiului egalității drumurilor optice, drumul optic, timpul de propagare a luminii, numărul de lungimi de undă și diferența de fază între două puncte conjugate $P_1$, $P_2$ sunt aceleași pentru toate razele de lumină A,B,C.. care trec prin aceste puncte (fig. 14.b). ***Condiția de stigmatism*** a punctelor conjugate $P_1$, $P_2$ se scrie deci sub forma

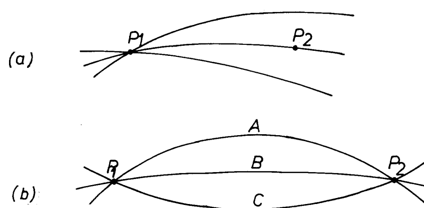



**Fig. 14.a,b.** Cu privire la definirea stigmatismului.

$$[P_1P_2] = [P_1AP_2] = [P_1BP_2] = [P_1CP_2] = ... = \quad \text{constant} \qquad (69)$$

și reprezintă singurul mod în care lumina se poate propaga între două puncte adoptând efectiv și simultan mai multe drumuri alăturate. Într-adevăr, numai în acest fel condiția de staționaritate a drumului optic între punctele conjugate, impusă de principiul lui Fermat, ecuația (35), este satisfăcută în mod indiferent de orice rază de lumină din fasciculul considerat. Proprietatea de egalitate a timpului de propagare a luminii între punctele conjugate se numește ***tautocronism***.

Poate, cel mai clar apare semnificația fizică a noțiunii de imagine în optica geometrică din proprietatea de egalitate a numărului de lungimi de undă, respectiv din aceea că faza relativă a undelor armonice care se propagă pe diversele raze este aceeași în punctele conjugate. Pentru a ilustra modul în care se realizează o imagine perfectă, în fig. 15. a,b,c se arată reconstrucția undelor sferice la o ***suprafață carteziană de refracție*** (***ovalul lui Descartes***), definită ca suprafață de separare $\Sigma$ dintre două medii omogene $n_1$, $n_2$ și ale cărei puncte I satisfac condiția de stigmatism (numai) pentru o pereche dată de puncte conjugate $P_1$, $P_2$. În general, ovalul lui Descartes reprezintă o ***suprafață asferică*** bipolară, cu simetrie de revoluție în jurul axului care trece prin punctele conjugate considerate. Astfel, pentru cazul în care ambele puncte conjugate sunt reale, adică puncte prin care razele de lumină trec efectiv (fig. 15, a), suprafața carteziană satisface ecuația

$$[P_1IP_2] = n_1 \cdot P_1I + n_2 \cdot IP_2 = \lambda_0\left(\frac{P_1I}{\lambda_1} + \frac{IP_2}{\lambda_2}\right) = \quad \text{constant.} \qquad (70)$$

Cu alte cuvinte, indiferent de punctul de incidență I al razelor de lumină pe suprafață, punctele conjugate sunt separate de același număr de lungimi de undă (în fig. 15.a acest număr a fost luat egal cu 23).

Condiția de stigmatism (70) poate fi extinsă și pentru cazurile în care unul sau ambele puncte conjugate sunt virtuale. Să considerăm, de exemplu, situația în care $P_1$ este real și $P_2$ virtual (fig. 15,b). Prin $P_2$ trec acum numai prelungirile rectilinii ale razelor de lumină din mediul $n_2$ . Conform principiului egalității drumurilor optice, între punctul real $P_1$ și o suprafață de undă $\phi_2$, din mediul $n_2$ , dată (dar de altfel arbitrară) avem

$$[P_1IJ] = n_1 \cdot P_1I + n_2 \cdot IJ = n_1 \cdot P_1I + n_2 \cdot (P_2J - P_2I) \quad = \text{constant},$$

indiferent de punctul de incidență I. Segmentul $P_2J$ reprezintă însă raza suprafeței sferice $\phi_2$ considerate și este constant, astfel că rezultă condiția de stigmatism (ecuația suprafeței carteziene) în forma

$$n_1 \cdot P_1I - n_2 \cdot P_2I = \lambda_0\left(\frac{P_1I}{\lambda_1} - \frac{P_2I}{\lambda_2}\right) = \quad \text{constant.} \qquad (71)$$

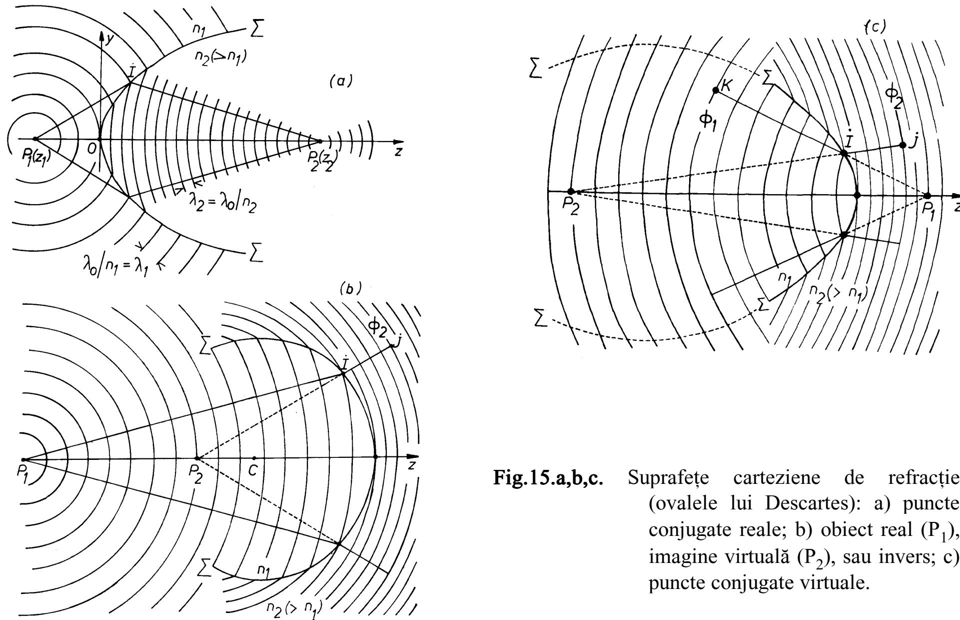



**Fig.15.a,b,c.** Suprafețe carteziene de refracție (ovalele lui Descartes): a) puncte conjugate reale; b) obiect real ($P_1$), imagine virtuală ($P_2$), sau invers; c) puncte conjugate virtuale.

De data aceasta, spre deosebire de condiția (70), indiferent de poziția punctului de incidență I, punctele conjugate sunt separate de aceeași diferență de număr de lungimi de undă între raza reală $P_1I$ și raza virtuală $P_2I$ (pentru fig.15,b, constanta din ecuația (71) a fost aleasă, de exemplu, egală cu zero). În mod similar, se arată că ecuația suprafeței carteziene pentru situația în care punctul $P_1$ este virtual și $P_2$ real are forma

$$-n_1 \cdot IP_1 + n_2 \cdot IP_2 = \lambda_0\left(-\frac{IP_1}{\lambda_1} + \frac{IP_2}{\lambda_2}\right) = \quad \text{constant.} \qquad (72)$$

Observăm că, în cazurile descrise de ecuațiile (71) sau (72), punctele conjugate se află de aceeași parte a suprafeței carteziene. În particular, când diferența drumurilor optice dintre raza reală și raza virtuală este nulă, suprafața carteziană degenerează într-o suprafață sferică (vezi fig. 15,b) iar punctele conjugate corespunzătoare poartă numele de ***punctele lui Weierstrass*** (sau ***punctele lui Young***). Aceste puncte prezintă o importanță practică deosebită deoarece, pe de o parte, suprafața sferică este cel mai ușor de realizat prin șlefuire și, pe de altă parte, punctele lui Weierstrass nu sunt numai stigmatice ci și aplanetice (vezi secțiunea 2.1.). În fine, în cazul în care ambele puncte conjugate sunt virtuale (fig. 15,c), aplicând principiul egalității drumurilor optice între o suprafață de undă $\phi_1$, din mediul $n_1$ și o suprafață de undă $\phi_2$, din mediul $n_2$, obținem

$$[KIJ] = n_1 \cdot KI + n_2 \cdot IJ = n_1 \cdot (KP_1 - IP_1) + n_2 \cdot (P_2J - P_2I) = \quad \text{constant,}$$

indiferent de poziția punctului de incidență I. Dar, razele de curbură $KP_1$ și $P_2J$ ale suprafețelor sferice $\phi_1$, respectiv $\phi_2$, sunt constante astfel că putem scrie

$$-n_1 \cdot IP_1 - n_2 \cdot P_2I = -\lambda_0\left(\frac{IP_1}{\lambda_1} + \frac{P_2I}{\lambda_2}\right) = \text{constant.} \qquad (73)$$

Deci, ca și în cazul punctelor conjugate reale, ecuația (70), punctele conjugate virtuale se află de o parte și de alta a suprafeței carteziene și, indiferent de poziția punctului de incidență I, sunt separate de același număr de lungimi de undă (în fig.15,c acest număr a fost luat egal cu 18).

Recapitulând rezultatele obținute în ecuațiile (70) - (73), avem:

$$\begin{array}{lrl} P_1, P_2 \text{ reale:} & n_1 \cdot P_1I + n_2 \cdot IP_2 = & \text{constant,} \\ P_1, P_2 \text{ virtuale:} & -n_1 \cdot IP_1 - n_2 \cdot P_2I = & \text{constant,} \\ P_1 \text{ real, } P_2 \text{ virtual:} & n_1 \cdot P_1I - n_2 \cdot P_2I = & \text{constant,} \\ P_1 \text{ virtual, } P_2 \text{ real:} & -n_1 \cdot IP_1 + n_2 \cdot IP_2 = & \text{constant,} \end{array} \qquad (74)$$

unde toate segmentele au fost considerate pozitive. Pe scurt, ***condițiile de stigmatism riguros***, adică ecuațiile (74), se scriu

$$[P_1IP_2] = n_1 \cdot P_1I + n_2 \cdot IP_2 = \quad \text{constant,} \qquad (75)$$

unde segmentele sunt considerate algebric și anume: ***facem convenția că drumul optic este pozitiv dacă este parcurs în sensul de propagare și negativ dacă este parcurs în sens invers.***

De fapt, distingem două categorii de situații și anume

$$n_1 \cdot |P_1I| \pm n_2 \cdot |IP_2| = \quad \text{constant,} \qquad (76)$$

unde semnul plus corespunde cazului în care punctele conjugate se află de părți diferite ale suprafeței carteziene iar semnul minus - cazului în care punctele conjugate se află de aceeași parte.

Remarcăm că, din punct de vedere formal, specializarea formulelor de mai sus pentru reflexie se face prin simpla înlocuire $n_2 = -n_1$ astfel că ecuația (76) devine

$$|P_1I| \mp |IP_2| = \quad \text{constant ,} \qquad (77)$$

unde, de data aceasta semnul minus corespunde cazului în care punctele conjugate se află de părți diferite ale oglinzii iar semnul plus - cazului în care punctele conjugate se află de aceeași parte. Într-adevăr, cum rezultă din contemplarea fig. 16, ***suprafețele carteziene de reflexie*** reprezintă fie hiperboloizi de revoluție (fig. 16,b,c, cu focarele în punctele $P_1$, $P_2$, din care unul real și altul virtual), fie elipsoizi de revoluție (fig. 16,e,f, cu focarele în punctele $P_1, P_2$, ambele reale sau ambele virtuale). Un caz particular de oglindă hiperbolică este oglinda plană (fig. 16,d, când constanta din ecuația (77) este nulă). De asemenea, când unul din focare se deplasează la infinit, oglinda eliptică devine parabolică (fig. 16, g, h).

În general, spre deosebire de suprafațele carteziene de reflexie, ecuația (77), care sunt suprafețe cu secțiuni conice, suprafețele carteziene de refracție, ecuația (76), sunt mult mai complicate. Astfel, fixând punctele conjugate $P_1(z_1)$, $P_2(z_2)$ și alegând un sistem de coordonate carteziene **yOz** cu originea în vârful **O** al suprafeței $\Sigma$ (fig. 15,a), ecuația (76) se scrie

$$n_1 \cdot \sqrt{(z-z_1)^2+y^2} \pm n_2 \cdot \sqrt{(z-z_2)^2+y^2} = n_1 \cdot |z_1| \pm n_2 \cdot |z_2|, \qquad (78)$$

unde semnul plus corespunde cazului în care punctele $P_1, P_2$ se află de părți diferite ale originii **O**, adică $z_1 z_2 < 0$, iar semnul minus - cazului în care punctele $P_1, P_2$ se află de aceeași parte, adică $z_1 z_2 > 0$. Eliminând radicalii prin două ridicări la pătrat și aranjând termenii în ordinea puterilor descrescătoare ale valorilor y, z, obținem finalmente ***ecuația ovalului lui Descartes*** în forma

$$\begin{aligned}&(n_1^2-n_2^2)^2 \cdot (y^2+z^2)^2 - 4(n_1^2-n_2^2)\cdot(n_1^2 z_1 - n_2^2 z_2)\cdot z(y^2+z^2)+\\&+4n_1 n_2(n_1 z_1 - n_2 z_2)(n_1 z_2 - n_2 z_1)(y^2+z^2) + 4(n_1^2 z_1 - n_2^2 z_2)^2 z^2 -\\&-8n_1 n_2 (n_1-n_2)(n_1 z_1 - n_2 z_2) z_1 z_2 z = 0 \quad .\end{aligned} \qquad (79)$$

Această ecuație reprezintă secțiunea meridională a unei suprafețe de revoluție de gradul al patrulea. Pentru anumite valori ale parametrilor $n_1, n_2, z_1, z_2$, ovalul lui Descartes degenerează într-o suprafață de gradul al doilea. Astfel, termenii de gradul patru și trei se anulează dacă $n_1^2 - n_2^2 = 0$, adică $n_2 = \pm n_1$. Cazul $n_2 = n_1$ este trivial (mediile adiacente sunt identice) iar cazul $n_2 = -n_1$ se realizează în reflexie și a fost discutat mai sus. De asemenea, dacă avem relația

$$n_1 z_1 = n_2 z_2 \ , \qquad (z_1 z_2 > 0) \ , \qquad (80)$$

atunci ecuația (79) devine

$$(n_1^2 - n_2^2)\cdot(y^2+z^2) - 2z(n_1^2 z_1 - n_2^2 z_2) = 0,$$

adică sfera

$$y^2 + \left(z - \frac{n_1^2 z_1 - n_2^2 z_2}{n_1^2 - n_2^2}\right)^2 = = \left(\frac{n_1^2 z_1 - n_2^2 z_2}{n_1^2 - n_2^2}\right)^2, \qquad (81)$$

cu centrul C în punctul

$$y_c = 0\,, \qquad z_c = \frac{n_1^2 z_1 - n_2^2 z_2}{n_1^2 - n_2^2} \qquad (82)$$

și raza $r = |z_c|$ . Folosind expresia lui $z_c$ , ecuația (82), poziția ***punctelor lui Weierstrass***, definite prin ecuația (80), se mai scrie

$$z_1 = \left(1 + \frac{n_2}{n_1}\right) z_c\,,$$

$$z_2 = \left(1 + \frac{n_1}{n_2}\right) z_c\,. \qquad (83)$$

Observăm că punctele lui Weierstrass $P_1(z_1), P_2(z_2)$ și centrul de curbură $C(z_c)$ se află de aceeași parte a suprafeței $\Sigma$ , cum se arată în fig. 15,b (pentru aplicații vezi paragraful 2.1.)

În fine, dacă unul din punctele conjugate se află la infinit ( $|z_1| \to \infty$ *sau* $|z_2| \to \infty$), atunci ovalul lui Descartes este un elipsoid sau hiperboloid de revoluție. Pentru a demonstra aceasta, observăm că membrul stâng al ecuației (79) reprezintă un polinom de gradul al doilea în $z_1$ (sau $z_2$ ), astfel că ecuația ovalului se mai scrie

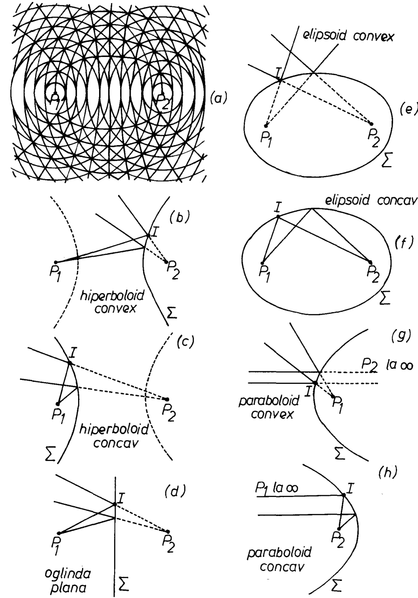



**Fig. 16.** Suprafețe carteziene de reflexie: elipsoizi de revoluție (a, e,f), hiperboloizi de revoluție (b, c și, în particular, d) și paraboloizi de revoluție (g, h).

$$\left[(n_1^2 - n_2^2)z^2 - n_2^2 y^2 - 2n_2(n_1 - n_2)z_2 z\right] \cdot z_1^2 + ... = 0 \qquad .$$

Dacă $|z_1| \to \infty$ , atunci paranteza dreaptă din ultima ecuație trebuie să se anuleze, adică

$$(n_1^2 - n_2^2)z^2 - n_2^2 y^2 - 2n_2(n_1 - n_2)z_2 z = 0 \qquad , \qquad (84)$$

sau în forma canonică

$$\frac{\left(z - \dfrac{n_2 z_2}{n_1 + n_2}\right)^2}{\left(\dfrac{n_2 z_2}{n_1 + n_2}\right)^2} + \frac{y^2}{\dfrac{n_2 - n_1}{n_1 + n_2} z_2^2} = 1 \qquad . \qquad (85)$$

Ecuația (85), în cazul $n_2 > n_1$ , reprezintă un elipsoid de revoluție (fig. 17,a,b), iar în cazul $n_2 < n_1$ , un hiperboloid de revoluție (fig. 17,c,d). La acest rezultat se poate ajunge și direct dacă observăm că, pentru $z_1 \to -\infty$ , condiția de stigmatism impune ca drumul optic între un plan de undă incident (oarecare) și punctul imagine $P_2$ să fie constant. Astfel, de exemplu, pentru situația din fig. 17,a , avem $[JIP_2] = [OP_2]$ , adică

$$n_1 z + n_2 \cdot \sqrt{(z-z_2)^2 + y^2} = n_2 z_2 \qquad ,$$

de unde, prin izolarea radicalului, ridicare la pătrat și aranjare, obținem ecuația (85). Acest rezultat este valabil și pentru celelalte situații prezentate în fig.17.

Conform ecuației (85), semi-axa mare **a**, semi-axa mică **b**, distanța focală **f** și excentricitatea $e = f/a$ au expresiile

$$a = \frac{n_2|z_2|}{n_1+n_2}, \quad b = \left(\frac{n_2-n_1}{n_2+n_1}\right)^{1/2}|z_2|, \qquad f = \sqrt{a^2-b^2} = \frac{n_1|z_2|}{n_1+n_2}, \quad e = \frac{n_1}{n_2} < 1, \tag{86}$$

pentru elipsoid $(n_2 > n_1)$ și

$$a = \frac{n_2|z_2|}{n_1+n_2}, \; b = \left(\frac{n_1-n_2}{n_2+n_1}\right)^{1/2}|z_2|, \; f = \sqrt{a^2+b^2} = \frac{n_1|z_2|}{n_1+n_2}, \; e = \frac{n_1}{n_2} > 1 \qquad , \tag{87}$$

pentru hiperboloid $(n_2 < n_1)$ . În ambele cazuri centrul C al secțiunii conice este în punctul

$$z_c = \frac{n_2 z_2}{n_1+n_2}, \quad y_c = 0. \tag{88}$$

Imaginea $P_2$ coincide cu focarul din dreapta $(F_2)$ pentru $z_2 = z_c + f\,(>0)$ sau cu focarul din stânga $(F_1)$ pentru $z_2 = z_c - f\,(<0)$.

În cazul reflexiei $(n_2 = -n_1)$ , ecuația (84) devine

$$y^2 = 4z_2 z \tag{89}$$

și reprezintă un paraboloid de rotație de parametru $p = 2z_2$. Dacă $p > 0$, imaginea este virtuală (fig. 16, g), iar dacă $p < 0$, imaginea este reală (fig. 16, h).

Suprafețele carteziene de reflexie prezintă importanță pentru construcția telescoapelor și a proiectoarelor. Astfel, obiectivul telescoapelor de reflexie (Newton, Herschel, Gregory, Cassegrain) este o oglindă parabolică concavă iar oglinda secundară este eliptică concavă (Gregory) sau hiperbolică convexă (Cassegrain), vezi secțiunea 2.5, (fig. 61).

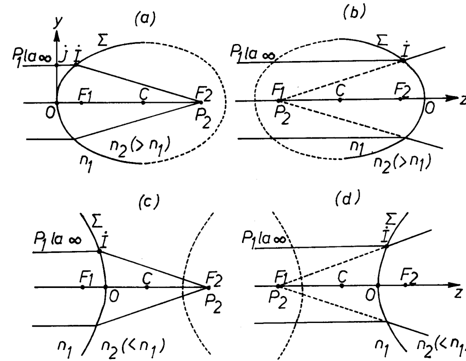



**Fig. 17.** Suprafețe carteziene de refracție pentru $P_1$ la infinit: elipsoizi de revoluție (a,b), hiperboloizi de revoluție (c,d).

De asemenea, proprietatea de stigmatism riguros a suprafețelor carteziene de refracție este folosită pentru realizarea ***lentilelor asferice***. În principiu, referindu-ne la fig.15,a,b,c, o lentilă asferică, confecționată din mediul optic $n_2$, este limitată de suprafața carteziană $\Sigma$ și orice

suprafață sferică $\phi_2$ cu centrul în $P_2$. În practică sunt folosite suprafețele carteziene cu secțiune conică, așa cum este ilustrat în fig.18 pentru lentila sfero-eliptică (a), plano-hiperbolică (b) sau dublu-hiperbolică (c). Datorită lipsei aberației de sfericitate (vezi paragraful 2.8), lentilele asferice pot avea diametre $D$ ale aperturii mult mai mari și distanțe focale $f$ mult mai mici decât lentilele sferice. În consecință, se poate ajunge la ***numere*** $f \overset{def.}{=} f/D$ (vezi paragraful 2.6) foarte mici (în practică până la 0,6), respectiv la o densitate de flux luminos în planul imaginii foarte mare. Lentilele asferice permit astfel folosirea cea mai eficientă a surselor și detectorilor de lumină, de unde și numeroasele lor aplicații în sistemele optice actuale de comunicații și control. În fine, mai remarcăm folosirea proprietăților punctelor lui Weierstrass pentru realizarea lentilelor stigmatice și aplanetice și a obiectivelor de microscop de apertură numerică mare (vezi paragraful 2.1.).

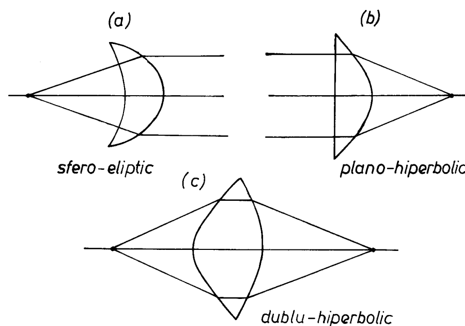


**Fig.18.** Trei tipuri de lentile asferice.

Spre deosebire de o suprafață carteziană sau o lentilă asferică, la care stigmatismul se realizează pentru o singură pereche de puncte conjugate, un ***instrument optic perfect*** (cum este, de exemplu, distribuția maxwelliană a indicelui de refracție, denumită "ochi de pește", vezi paragraful 3.3), pune în corespondență biunivocă și reciprocă orice punct obiect $P_1$ din spațiul tridimensional cu imaginea sa punctuală $P_2$. Dacă $P_1$ descrie o curbă $C_1$, atunci și $P_2$ descrie o curbă conjugată $C_2$. În mod similar, curbele conjugate genereazǎ suprafețe conjugate iar acestea volume conjugate. În acest mod, se introduce în optica geometrică noțiunea de ***imagine stigmatică*** a obiectelor spațiale extinse.

În cazul sistemelor optice reale proprietatea de conservare a conicității în perechi de puncte conjugate nu se mai poate menține pentru obiecte oricât de extinse și cu fascicule de raze de orice deschidere.

În continuare, vom deduce condiția generală pentru ca stigmatismul, presupus realizat pentru o pereche de puncte $P_1, P_2$, să se mențină și pentru orice pereche de puncte vecine corespunzătoare $Q_1, Q_2$ (fig.19). Pentru aceasta, vom porni de la definiția punctelor conjugate, ecuația (69), conform căreia drumul optic pe orice rază $P_1PP_2$ este egal cu constanta $[P_1P_2]$ iar drumul optic pe orice rază $Q_1QQ_2$ este egal cu constanta $[Q_1Q_2]$. Condiția de conservare a stigmatismului în perechi de puncte vecine se scrie deci

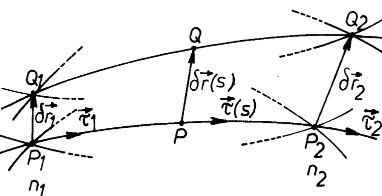


**Fig.19.** Pentru deducerea condiției generale de stigmatism la perechi de puncte vecine.

$$\delta[P_1P_2] = [Q_1Q_2] - [P_1P_2] = \text{constant}. \tag{90}$$

Dar drumul optic, ecuația (26), reprezintă diferența de fază dintre oscilațiile armonice în punctele considerate, adică $[P_1P_2] = \phi(\vec{r}_2) - \phi(\vec{r}_1)$ . Prin variația perechii de puncte conjugate $P_1, P_2$ avem deci

$$\delta[P_1P_2] = \delta\phi(\vec{r}_2) - \delta\phi(\vec{r}_1) = \nabla\phi(\vec{r}_2)\cdot\delta\vec{r}_2 - \nabla\phi(\vec{r}_1)\cdot\delta\vec{r}_1 =$$

$$= n_2\vec{\tau}_2\cdot\delta\vec{r}_2 - n_1\vec{\tau}_1\cdot\delta\vec{r}_1, \qquad (91)$$

unde am folosit ecuația eiconalului $\nabla\phi = n\vec{\tau}$, adică ecuația (9). Variațiile $\delta\vec{r}_1 = \overrightarrow{P_1Q_1}$ și $\delta\vec{r}_2 = \overrightarrow{P_2Q_2}$ definesc o nouă pereche de puncte vecine $Q_1, Q_2$. Dacă $(P_1, P_2)$ și $(Q_1, Q_2)$ reprezintă perechi de puncte conjugate, atunci din ecuațiile (90), (91) rezultă ***condiția generală de stigmatism*** sau ***teorema cosinușilor***

$$n_2\vec{\tau}_2\cdot\delta\vec{r}_2 - n_1\vec{\tau}_1\cdot\delta\vec{r}_1 = n_2\delta r_2\cos(\vec{\tau}_2,\delta\vec{r}_2) - n_1\delta r_1\cos(\vec{\tau}_1,\delta\vec{r}_1) = \text{constant}. \qquad (92)$$

Această ecuație leagă lungimile optice elementare $n_1\cdot\delta r_1$ și $n_2\cdot\delta r_2$ ale obiectului și imaginii sale stigmatice de orientarea acestora în punctele conjugate corespunzătoare $P_1, P_2$ față de orice rază de lumină $P_1PP_2$ care trece prin aceste puncte.

Teorema fundamentală de stigmatism (92) mai poate fi demonstrară considerând razele $Q_1QQ_2$ ca variații ale razelor $P_1PP_2$ (fig.19), astfel că ecuația (90) se scrie

$$\delta[P_1P_2] = \delta\int_{P_1}^{P_2} n ds = \int_{P_1}^{P_2}(\delta n)ds + \int_{P_1}^{P_2} n\delta(ds) = \text{constant}. \qquad (93)$$

Dezvoltând calculul variațional ca și pentru ecuația (28), finalmente obținem

$$n_2\vec{\tau}_2\cdot\delta\vec{r}_2 - n_1\vec{\tau}_1\cdot\delta\vec{r}_1 + \int_{P_1}^{P_2}\left[\nabla n - \frac{d}{ds}(n\vec{\tau})\right]\cdot\delta\vec{r}(s)ds = \text{constant} \quad , \qquad (94)$$

unde integrala se anulează în virtutea ecuației (13) a razei.

Majoritatea instrumentelor optice de format imagini au simetrie de rotație. Din acest motiv, în continuare vom analiza condiția de stigmatism în vecinătatea unei perechi oarecare de puncte conjugate $P_1, P_2$ situate pe axul optic Oz al unui sistem de revoluție.

Să considerăm mai întâi condiția de stigmatism transversal (aplanetism) pentru mici obiecte și imagini plane și perpendiculare pe axul optic (fig.20,a). Această condiție este cel mai frecvent impusă instrumentelor optice și, în mod special, obiectivelor de microscop și aparatelor de proiecție. În acest caz, condiția generală (92) capătă forma particulară

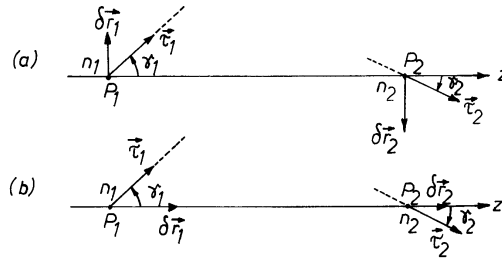



**Fig.20.** Pentru deducerea condiției de stigmatism transversal (a) și longitudinal (b).

$$n_2\delta r_2\sin\gamma_2 - n_1\delta r_1\sin\gamma_1 = \text{constant}. \qquad (95)$$

Pentru determinarea constantei vom folosi raza de lumină care se propagă în lungul axului optic $(\gamma_1 = \gamma_2 = 0)$ , astfel că finalmente obținem ***condiția de stigmatism transversal (de aplanetism)***, denumită și ***condiția de sinus a lui Abbe***

$$n_1 \delta r_1 \sin\gamma_1 = n_2 \delta r_2 \sin\gamma_2. \qquad (96)$$

Această ecuație trebuie satisfăcută pentru orice rază $P_1PP_2$ care trece prin punctele conjugate $P_1, P_2$, adică pentru orice pereche de unghiuri $\gamma_1, \gamma_2$. Pentru raze paraxiale, adică raze cu înclinare $\gamma$ mică față de axul optic astfel că $\sin\gamma \approx \gamma$, condiția (96) se reduce la ***teorema Lagrange-Helmholtz***

$$n_1 \delta r_1 \gamma_1 = n_2 \delta r_2 \gamma_2. \qquad (97)$$

O cerință importantă impusă sistemelor optice este aceea ca imaginea să fie asemănătoare cu obiectul (***proprietatea de ortoscopie***). În aceste condiții, ***mărirea liniară transversală*** $m_t \overset{def.}{=} \delta r_2/\delta r_1$ a sistemului trebuie să fie constantă și condiția de sinus a lui Abbe se scrie

$$\frac{\sin\gamma_1}{\sin\gamma_2} = m_t \frac{n_2}{n_1} = \text{constant} \quad . \qquad (98)$$

Să considerăm în continuare condiția de stigmatism axial pentru mici obiecte și imagini liniare așezate de-a lungul axului optic (fig.20,b). Această condiție este importantă pentru construcția instrumentelor destinate să formeze imagini în profunzime sau să vizeze un punct mobil pe axul optic. În acest caz, condiția generală (92) devine

$$n_2 \delta r_2 \cos\gamma_2 - n_1 \delta r_1 \cos\gamma_1 = \text{ constant} \quad , \qquad (99)$$

sau, determinând constanta cu ajutorul razei axiale $(\gamma_1 = \gamma_2 = 0)$,

$$n_1 \delta r_1 (1 - \cos\gamma_1) = n_2 \delta r_2 (1 - \cos\gamma_2). \qquad (100)$$

Am obținut astfel ***condiția de stigmatism axial*** sau ***condiția de sinus a lui Herschel***

$$n_1 \delta r_1 \sin^2(\gamma_1/2) = n_2 \delta r_2 \sin^2(\gamma_2/2). \qquad (101)$$

Această ecuație trebuie satisfăcută pentru orice rază $P_1PP_2$, adică pentru orice pereche de unghiuri $\gamma_1, \gamma_2$. Considerând ***mărirea liniară axială*** $m_a \overset{def.}{=} \delta r_2/\delta r_1$ a sistemului constantă, condiția de sinus a lui Herschel se scrie

$$\frac{\sin^2(\gamma_1/2)}{\sin^2(\gamma_2/2)} = m_a \cdot \frac{n_2}{n_1} = \text{ constant} \quad . \qquad (102)$$

Din nefericire, condițiile Abbe, ecuația (98), și Herschel, ecuația (102), nu sunt compatibile pentru înclinări mari decât în cazul particular $|\gamma_1| = |\gamma_2|$, în care $|m_t| = |m_a| = n_1/n_2$. În concluzie, cu excepția menționată, este imposibil de realizat un instrument optic axial care să formeze cu fascicule de lumină cu deschidere mare imaginea stigmatică a unui element de volum situat pe axul optic. Din acest motiv, în realizarea practică a instrumentelor optice, se satisface acea condiție care este cea mai conformă cu destinația.

În general, cele două condiții de stigmatism (98) și (102), pot fi simultan satisfăcute numai dacă imaginea este formată cu ajutorul razelor paraxiale ($\sin\gamma \approx \gamma$), astfel că

$$\frac{\sin\gamma_2}{\sin\gamma_1} \approx \frac{\sin(\gamma_2/2)}{\sin(\gamma_1/2)} \approx \frac{\gamma_2}{\gamma_1} = m_u \quad , \tag{103}$$

unde $m_u \overset{def.}{=} \gamma_2/\gamma_1$ reprezintă ***mărirea unghiulară***. Pentru raze paraxiale există relații simple între mărirea unghiulară și măririle liniare. Astfel, condițiile lui Abbe și Herschel devin

$$m_t m_u = n_1/n_2, \qquad m_a m_u^2 = n_1/n_2, \tag{104}$$

și relația dintre cele trei mărimi se scrie sub forma

$$m_a m_u = m_t. \tag{105}$$

În încheiere, vom deduce o relație fundamentală între strălucirea unui mic obiect plan, transversal, de arie $dS_1$, și aceea a imaginii sale aplanetice, de arie $dS_2$ (fig.21). Conform condiției de sinus a lui Abbe, ecuația (96), avem

$$n_1^2 dS_1 \sin^2\gamma_1 = n_2^2 dS_2 \sin^2\gamma_2. \tag{106}$$

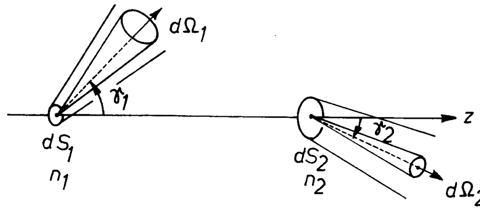


**Fig.21.** Pentru deducerea legăturii dintre strălucirea imaginii și strălucirea obiectului.

Strălucirea energetică a surselor de lumină spațial extinse, într-o direcție oarecare $\gamma$ față de normala la suprafața lor, este caracterizată de ***radianța (strălucirea, luminanța)*** $L(\gamma)$, definită ca fluxul de energie emis în unitatea de unghi solid de unitatea de suprafață aparentă, adică

$$L(\gamma) = \frac{dF}{d\Omega dS \cos\gamma}. \tag{107}$$

În sistemul internațional strălucirea se măsoară deci în $Watt/steradian.m^2$ . Sursele care ascultă de ***legea lui Lambert*** emit lumină complet haotica ("randomizată") astfel că radianța lor nu depinde de $\lambda$ (sursele corp negru sau sursele perfect difuzante). Pentru generalitate, vom păstra această dependență și vom folosi relația fluxurilor conjugate în forma

$$dF_2(\gamma_2) = T(\gamma_1)dF_1(\gamma_1), \tag{108}$$

unde factorul de transmisie $T(\leq 1)$ este determinat de pierderile de energie în sistem cauzate de reflexie, absorbție și difuzia luminii. Introducând radianța, ecuația (107), și considerând $d\Omega = 2\pi \sin\gamma d\gamma$, relația (108) se mai scrie sub forma

$$T(\gamma_1)L_1(\gamma_1)dS_1 \sin\gamma_1 \cos\gamma_1 d\gamma_1 = L_2(\gamma_2)dS_2 \sin\gamma_2 \cos\gamma_2 d\gamma_2. \tag{109}$$

Pe de altă parte, diferențiind ecuația (106) avem

$$n_1^2 dS_1 \sin\gamma_1 \cos\gamma_1 d\gamma_1 = n_2^2 dS_2 \sin\gamma_2 \cos\gamma_2 d\gamma_2. \tag{110}$$

Finalmente, din ecuațiile (109), (110), rezultă ***teorema lui Clausius***

$$T(\gamma_1)\frac{L_1(\gamma_1)}{n_1^2} = \frac{L_2(\gamma_2)}{n_2^2}, \tag{111}$$

sau, folosind expresia radianței, ecuația (107), și egalitatea (108),

$$n_1^2 d\Omega_1 dS_1 \cos\gamma_1 = n_2^2 d\Omega_2 dS_2 \cos\gamma_2. \tag{112}$$

Mărimea $n^2 d\Omega dS \cos\gamma$ poartă numele de ***extinderea fasciculului***. Teorema lui Clausius în forma (112) afirmă, deci, că ***extinderea fasciculului se conservă***. Cu alte cuvinte, cu cât unghiul solid $d\Omega$ este mai mare, cu atât suprafața aparentă $dS\cos\gamma$ este mai mică (vezi fig.21). Această lege de conservare are numeroase consecințe practice în fotometrie. Astfel, de exemplu, în cele mai bune condiții $(T = 1)$, din ecuația (111) avem $L_1/n_1^2 = L_2/n_2^2$. În particular, presupunând $n_1 = n_2$, rezultă că radianța se conservă, $L_1 = L_2$. În aceste condiții, nici cea mai bună focalizare nu poate crește strălucirea imaginii mai mult decât este strălucirea obiectului. Cu alte cuvinte, sistemul optic nu permite trecerea energiei de la o temperatură aparentă $T_1$ la o temperatură aparentă $T_2 > T_1$.

# Capitolul II
# SISTEME OPTICE CENTRATE

Cele mai importante instrumente optice de format imagini, ca și părțile lor constitutive (lentile, oglinzi), sunt ***sisteme optice centrate***. Acestea reprezintă o succesiune de medii optice omogene, izotrope și transparente, limitate de suprafețe sferice cu vârful și centrul de curbură pe aceeași dreaptă. Aceasta este axa de simetrie a sistemului și poartă numele de ***ax optic principal***. În practică, sistemele optice centrate conțin un număr mare de dioptri, pentru a compensa parțial atât aberațiile cromatice (vezi paragraful 2.7) cât și aberațiile geometrice care apar în domeniul extraparaxial (vezi paragraful 2.8). Proiectarea acestor sisteme se bazează pe trasarea razelor de lumină ("ray tracing") folosind în mod repetat legile de refracție sau reflexie la fiecare suprafață de separare și propagarea rectilinie în medii omogene între aceste suprafețe. Acest program, simplu în principiu, devine o sarcină formidabilă dacă este nevoie de foarte mare precizie. De aceea, proiectarea sistemelor optice, de la simpla trasare a razelor și până la corectarea aberațiilor supărătoare pentru aplicația dorită, se face astăzi cu ajutorul calculatoarelor de mare viteză. În funcție de performanțele cerute prin instrucțiuni, calculatorul poate selecta numărul de dioptri, curburile, indicii de refracție (tipurile de sticlă optică), grosimile, aperturile și, nu în ultimul rând, greutatea sistemului sau prețul de cost al produsului.

## *§ 2.1. Dioptrul sferic*

Suprafața cea mai ușor de confecționat cu mare precizie pentru realizarea lentilelor și oglinzilor este suprafața sferică. De aceea, în continuare, vom analiza condițiile în care este posibilă formarea imaginilor optice cu ajutorul unui ***dioptru sferic*** adică al unui ansamblu de două medii omogene, izotrope și transparente, separate de o suprafață sferică. În mod similar, se tratează și oglinda sferică.*

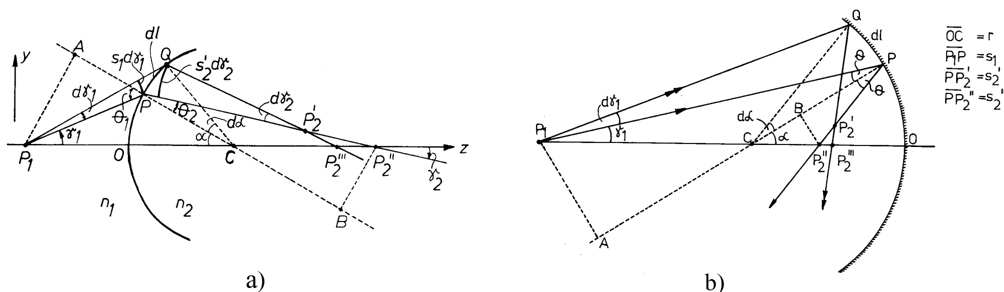



**Fig.22.** Formarea imaginilor în dioptrul sferic (a) și în oglinda sferică (b).

Pentru simplitate, vom studia mersul razelor de lumină dintr-un plan meridional yOz ***convenind să orientăm axul optic Oz în sensul general de propagare a razelor incidente, ales de la stânga spre dreapta***. Astfel, să considerăm un fascicul subțire de raze, mărginit de

* ***Dioptrica*** (grec. δια = prin) reprezintă optica sistemelor refringente iar ***catoptrica*** (grec. κατα = pe), reprezintă optica sistemelor reflectante.

razele infinit vecine $P_1PP_2''$ și $P_1QP_2'''$ care pleacă din punctul obiect $P_1$ situat pe axul optic; razele refractate corespunzătoare se intersectează între ele în punctul extraaxial $P_2'$ și cu axul optic în punctele $P_2''$ și $P_2'''$ (vezi fig.22).

În continuare, vom nota raza dioptrului $OC = r$ și abscisele oblice $P_1P = s_1$, $PP_2' = s_2'$, $PP_2'' = s_2''$. Prin derivarea legii de refracție $n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2$ în raport cu arcul de cerc $\overset{\frown}{OP} = l$ avem

$$n_1 \cos\theta_1 \frac{d\theta_1}{dl} = n_2 \cos\theta_2 \frac{d\theta_2}{dl} \tag{113}$$

sau, ținând cont că $\theta_1 = \alpha + \gamma_1$ și $\theta_2 = \alpha - \gamma_2$,

$$n_1 \cos\theta_1 \left( \frac{d\alpha}{dl} + \frac{d\gamma_1}{dl} \right) = n_2 \cos\theta_2 \left( \frac{d\alpha}{dl} - \frac{d\gamma_2}{dl} \right). \tag{114}$$

Mărimile $d\alpha/dl$, $d\gamma_1/dl$, $d\gamma_2/dl$ din ultima ecuație vor fi înlocuite cu expresiile lor care rezultă din relațiile $dl = r d\alpha$, $s_1 d\gamma_1 = dl \cos\theta_1$, $s_2' d\gamma_2 = dl \cos\theta_2$, astfel că, finalmente, obținem ***prima ecuație a lui Young***

$$\frac{n_1 \cos^2\theta_1}{s_1} + \frac{n_2 \cos^2\theta_2}{s_2'} = \frac{n_2 \cos\theta_2 - n_1 \cos\theta_1}{r}, \tag{115}$$

care determină abscisa oblică $s_2'$.

Să considerăm în continuare, triunghiurile asemenea $P_1AC$ și $P_2''BC$, obținute prin coborârea perpendicularelor din punctele $P_1$ și $P_2''$ pe dreapta CP. Avem $AC/BC = P_1A/P_2''B$ sau

$$\frac{s_1 \cos\theta_1 + r}{s_2'' \cos\theta_2 - r} = \frac{s_1 \sin\theta_1}{s_2'' \sin\theta_2} \equiv \frac{s_1 n_2}{s_2'' n_1}, \tag{116}$$

de unde rezultă ***a doua ecuație a lui Young***

$$\frac{n_1}{s_1} + \frac{n_2}{s_2''} = \frac{n_2 \cos\theta_2 - n_1 \cos\theta_1}{r}, \tag{117}$$

care determină abscisa oblică $s_2''$.

O analiză similară cu cea efectuată mai sus pentru dioptrul sferic conduce la ***ecuațiile lui Young pentru oglinda sferică*** (vezi fig.22,b)

$$-\frac{1}{s_1} + \frac{1}{s_2'} = \frac{2}{r \cos\theta_1}, \tag{118}$$

$$-\frac{1}{s_1} + \frac{1}{s_2''} = \frac{2 \cos\theta_1}{r}. \tag{119}$$

Observăm că specializarea formulelor dioptrului sferic (115), (117) pentru reflexie se face prin simpla înlocuire formală $\theta_2 = \theta_1$ și $n_2 = -n_1$.

Ecuațiile lui Young au fost deduse pentru cazul particular în care punctul obiect $P_1$ este situat în stânga suprafeței dioptrului (oglinzii) iar punctele $P_2$ și centrul ce curbură C în

dreapta, conform fig.22.a. În continuare, este convenabil să adoptăm o ***regulă a semnului segmentelor*** care să permită exprimarea tuturor cazurilor posibile prin aceleași ecuații. Din analiza diverselor cazuri particulare, ne putem convinge că o astfel de regulă există și anume să acordăm semnul absciselor punctelor $P_1, P_2, C$ astfel că $s_1 > 0, s_2 < 0, r < 0$ dacă punctele se găsesc în stânga suprafeței dioptrului (oglinzii), și de semn opus dacă se găsesc în dreapta acesteia. Cu această convenție, în cazul dioptrului, punctele $P_1, P_2$ sunt ***reale*** dacă $s_1, s_2 > 0$ și ***virtuale*** dacă $s_1, s_2 < 0$, iar în cazul oglinzii sunt ***reale*** dacă $s_1 > 0, s_2 < 0$ și ***virtuale*** dacă $s_1 < 0, s_2 > 0$.

Diferența $\delta = s_2'' - s_2'$, care caracterizează abaterea de la stigmatism, poartă numele de ***distanță de astigmatism.*** În general, dioptrul sferic și oglinda sferică nu sunt riguros stigmatice, adică $\delta \neq 0$ $(s_2' \neq s_2'')$. Există totuși cazuri excepționale de ***stigmatism riguros*** cum sunt, de exemplu, ***punctele lui Weierstrass (punctele lui Young).*** Astfel, din ecuațiile (115), (117) și condiția de stigmatism $s_2' = s_2'' = s_2$, rezultă

$$s_1 = \left(1 - \frac{n_2^2}{n_1^2}\right) \frac{n_1 r}{n_2 \cos\theta_2 - n_1 \cos\theta_1} \quad , \tag{120}$$

$$s_2 = \left(1 - \frac{n_1^2}{n_2^2}\right) \frac{n_2 r}{n_2 \cos\theta_2 - n_1 \cos\theta_1} \quad . \tag{121}$$

În acest caz, punctele $P_2', P_2'', P_2'''$ coincid cu același punct $P_2$ situat pe axul optic. Pentru raza axială $(\theta_1 = \theta_2 = 0)$ abscisele oblice devin obișnuite $s_1 = P_1 O = p_1$, $s_2 = OP_2 = p_2$, unde

$$\begin{cases} p_1 = -\left(1 + \frac{n_2}{n_1}\right) r, \\ p_2 = \left(1 + \frac{n_1}{n_2}\right) r \ , \end{cases} \tag{122}$$

stabilesc ***poziția punctelor conjugate ale lui Weierstrass***. În fig.23 este ilustrat cazul $n_1 = 2, n_2 = 1$, deci $p_1 = -3r/2, p_2 = 3r$, unde $r < 0$. Din ecuația (122) rezultă că $r > 0$ implică $p_1 < 0, p_2 > 0$ iar $r < 0$ implică $p_1 > 0, p_2 < 0$, adică ***punctele lui Weierstrass sunt de aceeași parte cu centrul de curbură C***.

Expresiile (122) se mai scriu $CP_1 = (n_2/n_1)r$, $CP_2 = (n_1/n_2)r$, de unde rezultă $CP_1 \cdot CP_2 = r^2$, adică punctele $P_1, P_2$ sunt conjugate armonic cu punctele $O, O'$ de intersecție a suprafeței dioptrului cu axul optic. Mai putem scrie $CP_1/CP = CP/CP_2$, adică triunghiurile $CP_1P$ și $CPP_2$ sunt asemenea, $\gamma_1 = \theta_2$ și $\gamma_2 = \theta_1$, deci

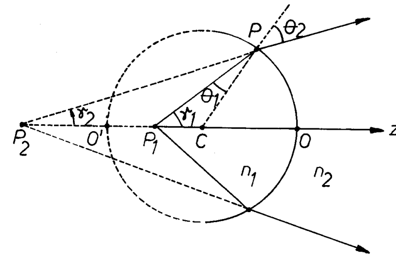



**Fig.23.** Punctele conjugate (Weierstrass, Young) ale dioptrului sferic.

$$\frac{\sin\gamma_1}{\sin\gamma_2} = \frac{\sin\theta_2}{\sin\theta_1} = \frac{n_1}{n_2} = \text{constant} \quad .$$

Am demonstrat astfel că punctele lui Weierstrass verifică condiția de sinus a lui Abbe (ecuația (98))

$$\frac{\sin\gamma_1}{\sin\gamma_2} = m_t \frac{n_2}{n_1} = \text{constant} \quad ,$$

cu mărirea liniară transversală $m_t = (n_1/n_2)^2$ .

Proprietatea de aplanetism a punctelor lui Weierstrass este folosită în construcția obiectivelor de microscop de mare ***apertură numerică*** $n_1 \sin\gamma_1$. În acest scop, de la fiecare punct $P_1$ al obiectului, trebuie colectat un con de lumină cât mai larg, cum este ilustrat în fig.24,a,b. Astfel, fig.24.a, prezintă ***metoda lui Amici*** cu lentile convex-concave în care punctul obiect $P_1$ este situat în centrul dioptrului sferic $1'$ și, totodată, în primul punct Weierstrass al dioptrului 1. Al doilea punct Weierstrass $P_2$ al dioptrului 1 reprezintă astfel imaginea aplanetică a punctului obiect $P_1$ în prima lentilă $(1, 1')$. În mod similar, punctul $P_3$ reprezintă imaginea aplanetică a punctului $P_2$ în a doua lentilă $(2, 2')$. În acest fel, respectând condiția de aplanetism riguros, fasciculul larg de lumină cu vârful în punctul obiect $P_1$, cu o apertură care se poate apropia de valoarea teoretică $2\gamma_1 = \pi$, este transformat într-un fascicul de raze paraxiale cu vârful în $P_3$. Obiectivul se termină, de regulă, cu un sistem acromat (A) pentru corectarea aberațiilor cromatice (vezi paragraful 2.7). Creșterea mai departe a aperturii numerice $n_1 \sin\gamma_1$ se realizează prin introducerea între obiectul de investigat și lentila frontală a unui lichid de imersie cu indice de refracție $n_1$ mare, de obicei ulei de cedru ($n = 1,515$), care are practic același indice de refracție cu cel al sticlei. Se reduc astfel și pierderile prin reflexie la prima suprafață a lentilei frontale. Fig.24.b ilustrează un astfel de ***obiectiv cu imersie***. În acest caz, primul dioptru $1'$ nu mai are nici un rol, astfel că lentila frontală poate fi o lentilă plan-convexă. Am insistat asupra acestor probleme deoarece ele au reprezentat un moment important în dezvoltarea instrumentelor optice de format iamgini. În teoria scalară a difracției luminii se arată că distanța minimă $(\delta r_1)_{\min}$ , dintre două puncte ale obiectului, care mai poate fi rezolvată este limitată de fenomenul de difracție, fiind dată de ***formula lui Abbe***

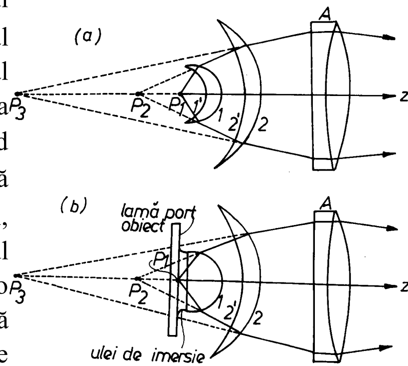



**Fig.24.** Obiective de microscop cu apertură numerică mare: a) de tip Amici, b) cu imersie.

$$(\delta r_1)_{\min} = \frac{0,61\lambda_1}{\sin\gamma_1} = \frac{0,61\lambda_0}{n_1 \sin\gamma_1}. \tag{123}$$

De aici rezultă că ***puterea de rezoluție spațială a obiectivelor de microscop***, definită ca $1/(\delta r_1)_{\min}$, poate fi crescută prin folosirea unei radiații de lungime de undă cât mai mică și realizarea unei aperturi numerice $n_1 \sin\gamma_1$ cât mai mari.

Mai sus am considerat cazul excepțional de stigmatism riguros cu fascicule largi, al punctelor lui Weierstrass. Pentru raze paraxiale $(\sin\gamma \approx \gamma)$, cum am arătat în paragraful 1.3, condițiile Abbe și Herschel pot fi întotdeauna aproximativ satisfăcute, permițând astfel realizarea unui ***stigmatism aproximativ*** pentru toate punctele de pe axul optic și din

vecinătatea acestuia. În particular, pentru dioptrul sferic în aproximația paraxială* avem $s_1 \approx p_1,\ s_2^{/} \approx s_2^{//} \approx p_2,\ \cos\theta \approx 1,$ astfel că ecuațiile lui Young (115), (117) conduc la o ecuație unică

$$\frac{n_1}{p_1} + \frac{n_2}{p_2} = \frac{n_2 - n_1}{r} \quad , \tag{124}$$

care reprezintă ***relația punctelor conjugate***. Membrul drept al acestei ecuații depinde numai de parametrii sistemului $(n_1, n_2, r)$. Pentru oglinzi sferice $(n_2 = -n_1)$ relația (124) devine

$$-\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} = \frac{2}{r} \quad . \tag{125}$$

Relația punctelor conjugate (124) permite să stabilim, pentru orice dioptru sferic sau oglindă sferică $(n_2 = -n_1)$, cu suprafață convexă $(r > 0)$, concavă $(r < 0)$ sau plană $(r \to \infty)$, atât pozițiile $p_1, p_2$ ale punctelor conjugate față de vârful O al suprafeței, cât și caracterul real sau virtual al acestor puncte, folosind regula semnului segmentelor convenită mai sus.

Dacă în relația punctelor conjugate (124) $p_2 \to \infty$, atunci $p_1 \to f_1$, iar dacă $p_1 \to \infty$, atunci $p_2 \to f_2$, unde

$$f_1 = \frac{n_1 r}{n_2 - n_1}, \quad f_2 = \frac{n_2 r}{n_2 - n_1} \tag{126}$$

poartă numele de ***distanțe focale*** (obiect, respectiv imagine). Avem, evident, relațiile

$$f_2 - f_1 = r, \quad f_1/f_2 = n_1/n_2. \tag{127}$$

Distanțele focale determină pe axul optic ***punctele focale*** sau ***focarele*** corespunzătoare $F_1, F_2$ . Acestea sunt ***reale*** dacă $f > 0$ sau ***virtuale*** dacă $f < 0$.

Inversele distanțelor focale, adică $C_1 = 1/f_1,\ C_2 = 1/f_2,$ poartă numele de ***convergențe***. Dioptrul este convergent sau divergent după cum convergența sa este pozitivă sau negativă. Unitatea obișnuită de măsură a convergenței este ***dioptria*** $(m^{-1})$.

O formă echivalentă a relației punctelor conjugate (124) se obține prin împărțire cu $(n_2 - n_1)/r$ și introducerea distanțelor focale (126), adică

$$\frac{f_1}{p_1} + \frac{f_2}{p_2} = 1, \tag{128}$$

ecuație cunoscută sub numele de ***formula Huygens-Gauss***.

---

* Mai exact, ***aproximația paraxială***, de ordinul întâi sau gaussiană (după numele lui Gauss, care a folosit-o sistematic prima dată în ***Dioptrische Untersuchungen***, (1843)) este valabilă atunci când razele fasciculului de lumină și normalele la suprafețele refringente fac unghiuri x mici (dar altfel arbitrare) cu axul optic astfel că $\sin x \approx \mathrm{tg} x \approx x$ și $\cos x \approx 1$, ceea ce practic înseamnă că $x \le 0{,}1$ radiani $\approx 6^0$ .

În fine, o altă formă a relației punctelor conjugate rezultă dacă determinăm pozițiile punctelor conjugate $P_1, P_2$ prin segmentele $\zeta_1, \zeta_2$ față de punctul focal corespunzător. Astfel, efectuând transformarea de coordonate (vezi fig.25)

$$\begin{cases} p_1 = \zeta_1 + f_1, \\ p_2 = \zeta_2 + f_2, \end{cases} \tag{129}$$

din formula lui Huygens-Gauss (128) rezultă imediat relația simplă și simetrică

$$\zeta_1 \zeta_2 = f_1 f_2, \tag{130}$$

ecuație care poartă numele de ***formula lui Newton***.

Ecuațiile deduse mai sus rămân valabile și pentru oglinda sferică $(n_2 = -n_1)$, deci cu distanțele focale

$$f_2 = -f_1 = \frac{r}{2} \ . \tag{131}$$

În acest caz, focarele $F_1, F_2$ sunt de aceeași parte a suprafeței oglinzii și coincid într-un punct focal comun, situat la jumătatea distanței dintre vârful oglinzii și centrul de curbură. Acest focar unic este real pentru oglinzi concave și virtual pentru oglinzi convexe.

Până acum am considerat relația punctelor conjugate $P_1, P_2$ situate pe axul optic principal (care trece prin centrul de curbură C și prin vârful O al calotei sferice). Evident, această relație rămâne valabilă și pentru punctele conjugate $Q_1, Q_2$ situate pe oricare alt ax secundar (care trece prin C dar nu și prin O), cum se arată în fig.25. Din acest motiv, imaginea unui arc de cerc sau calote sferice $\overset{\frown}{P_1Q_1}$ este un alt arc sau calotă $\overset{\frown}{P_2Q_2}$, ambele având centrul în C. În aproximația paraxială însă, considerăm numai punctele obiect și imagine din vecinătatea axului optic principal astfel că arcele și calotele $\overset{\frown}{PQ}$ se confundă cu micile obiecte sau imagini transversale $\delta r$, tangente în punctul P corespunzător.

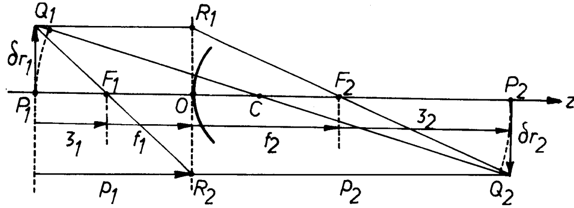


**Fig.25.** Construirea imaginii unui obiect în dioptrul sferic.

Construcția grafică a imaginilor se realizează în modul cel mai convenabil cu ajutorul unor raze de construcție (***raze principale***) care trec prin focare și prin centrul de curbură (fig.25). Această construcție este consistentă cu relația punctelor conjugate. Astfel, din asemănarea triunghiurilor $P_1Q_1F_1$ și $OR_2F_1$ sau $P_2Q_2F_2$ și $OR_1F_2$ rezultă

$$m_t \overset{def}{=} \frac{\delta r_2}{\delta r_1} = -\frac{f_1}{\zeta_1} = -\frac{\zeta_2}{f_2}, \tag{132}$$

unde ultima egalitate confirmă relația $\zeta_1\zeta_2 = f_1 f_2$, adică ecuația (130). O altă expresie pentru ***mărirea liniară transversală*** rezultă din asemănarea triunghiurilor $P_1Q_1C$ și $P_2Q_2C$, de unde obținem $\delta r_2/\delta r_1 = -(p_2 - r)/(p_1 + r)$ sau, eliminând $r$ cu ajutorul ecuației (124)

$$m_t \overset{def}{=} \frac{\delta r_2}{\delta r_1} = -\frac{n_1}{n_2} \cdot \frac{p_2}{p_1}. \qquad (133)$$

Remarcăm că mărirea transversală $m_t$ poate fi foarte mare dacă $p_2$ este foarte mare, adică dacă $P_1$ este în apropierea focarului $F_1$.

Relația punctelor conjugate (124) și expresia (133) permit să determinăm poziția și mărimea imaginii $p_2, \delta r_2,$ în funcție de poziția și mărimea obiectului, $p_1, \delta r_1,$ și anume

$$\begin{cases} p_2 = \frac{n_2 r p_1}{p_1(n_2 - n_1) - r n_1}, \\ \delta r_2 = \frac{n_1 r \delta r_1}{p_1(n_2 - n_1) - r n_1}. \end{cases} \qquad (134)$$

Aplicarea succesivă a acestor formule pentru fiecare dioptru în parte reprezintă o procedură directă pentru construcția imaginilor în sistemele optice centrate în aproximația paraxială. Astfel, imaginea formată de prima suprafață reprezintă un obiect în raport cu a doua suprafață, imaginea formată de a doua suprafață reprezintă un obiect în raport cu a treia suprafață ș.a.m.d.

***Mărirea liniară axială*** rezultă din diferențierea relației punctelor conjugate (124), adică

$$m_a \overset{def}{=} -\frac{dp_2}{dp_1} = \frac{n_1}{n_2} \cdot \frac{p_2^2}{p_1^2}. \qquad (135)$$

În fine, considerând o rază paraxială oarecare $P_1PP_2$ între două puncte conjugate situate pe axul optic principal (vezi fig.22), avem $\overset{\frown}{OP} = p_1\gamma_1 = -p_2\gamma_2$, de unde rezultă ***mărirea unghiulară***

$$m_u \overset{def}{=} \frac{\gamma_2}{\gamma_1} = -\frac{p_1}{p_2}. \qquad (136)$$

Înmulțind această expresie cu ecuația (133) avem confirmarea relației generale $m_t m_u = n_1/n_2$, ecuația (104), respectiv a teoremei Lagrange-Helmholtz $n_1\delta r_1\gamma_1 = n_2\delta r_2\gamma_2$, ecuația (97). De altfel, cele trei măriri ale dioptrului sferic verifică și celelalte relații generale, $m_a m_u^2 = n_1/n_2$ și $m_a m_u = m_t,$ valabile pentru orice sistem axial în aproximația paraxială (vezi § 1.3)

## *§ 2. 2. Matricea de transfer*

În continuare, vom dezvolta analiza paraxială a sistemelor optice centrate. Acest studiu are o importanță practică deosebită deoarece imaginile realizate cu raze paraxiale nu prezintă aberații de natură geometrică iar formulele deduse în această aproximație sunt

suficient de precise pentru numeroase aplicații. Pe de altă parte, acestea constituie baza de pornire pentru calcule mai exacte, deviațiile de la formulele analizei paraxiale reprezentând o măsură convenabilă pentru aprecierea calității instrumentelor optice reale.

Cum am arătat mai sus, o metodă directă de analiză paraxială a sistemelor optice centrate constă în aplicarea succesivă a relațiilor (134) pentru fiecare dioptru în parte. Alternativ, datorită modului repetitiv în care apar aceleași tipuri de relații liniare care descriu propagarea rectilinie și refracția (sau reflexia), ***orice sistem optic poate fi asociat cu o matrice de transfer*** care se calculează ca simplul produs al matricelor fundamentale de translație și refracție (sau reflexie). Metoda matriceală reprezintă un puternic instrument pentru calculul și proiectarea sistemelor optice și, cum vom arăta mai departe, permite demonstrarea unor teoreme importante ale opticii geometrice paraxiale.

Pentru conveniență, în continuare vom considera razele paraxiale meridionale din planul yOz cu axele carteziene orientate conform cu regula semnului segmentelor stabilită la studiul dioptrului sferic (vezi paragraful 2.1). Astfel, vom păstra convenția axei Oz situată pe axul optic principal și orientată în sensul general de propagare a razelor incidente, considerat de la stânga spre dreapta iar axa Oy orientată de jos în sus. Vom conveni de asemenea să măsurăm înclinarea $\gamma$ a razelor de lumină în radiani față de sensul axei Oz și să-i acordăm semnul conform sensului trigonometric.

În continuare este convenabil să definim ***starea razei de lumină***, în orice punct al ei, prin matricea coloană $2x1$ sau ***vectorul de stare***

$$V = \begin{bmatrix} y \\ \Gamma \end{bmatrix}, \qquad (137)$$

unde y este ***distanța la axul optic*** iar $\Gamma = n\gamma$ este ***înclinarea redusă***.

Propagarea rectilinie sau translația între planele $z = z_1$ și $z = z_2$ este descrisă de ecuațiile (vezi fig.26)

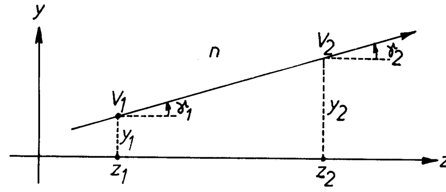



**Fig.26.** Descrierea matriceală a propagării rectilinii.

$$\begin{cases} y_2 = y_1 + (z_2 - z_1)tg\gamma_1, \\ \gamma_2 = \gamma_1. \end{cases} \qquad (138)$$

Introducând ***translația*** $t = z_2 - z_1$, ***translația redusă*** $t/n$, ***înclinările reduse*** $\Gamma_1 = n\gamma_1$, $\Gamma_2 = n\gamma_2$ și ținând cont de aproximația paraxială $tg\gamma \approx \gamma$, transformările de translație (138) se pot scrie

$$\begin{cases} y_2 = 1 \cdot y_1 + (t/n)\Gamma_1 \\ \Gamma_2 = 0 \cdot y_1 + 1 \cdot \Gamma_1 \end{cases}, \qquad (139)$$

sau, pe scurt, $V_2 = TV_1$ ,unde matricea pătratică $2x2$

$$T = \begin{bmatrix} 1 & t/n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad (140)$$

este ***matricea de translație***. Această matrice conține toată informația cu privire la sistemul parcurs de rază, adică mediul optic de grosime $t$ și indice de refracție $n$. Dacă translația este nulă $(t = 0)$, matricea de translație devine matricea unitate astfel că $y_2 = y_1$, $\Gamma_1 = \Gamma_2$ . Remarcăm că matricea de translație este de modul unitate, adică $\det T = 1$.

Să determinăm în continuare operatorul matriceal care reprezintă refracția, adică relația liniară dintre vectorul de stare $V_2(y_2, n_2\gamma_2)$ la începutul razei refractate și vectorul de stare $V_1(y_1, n_1\gamma_1)$ la sfârșitul razei incidente. Prima relație este simplu

$$y_2 = y_1 \ . \tag{141}$$

A doua relație liniară rezultă din legea de refracție în aproximația paraxială $n_1\theta_1 = n_2\theta_2$, adică $n_1(\alpha + \gamma_1) = n_2(\alpha + \gamma_2)$ ,sau

$$n_1(\frac{y_1}{r} + \gamma_1) = n_2(\frac{y_1}{r} + \gamma_2) \quad , \tag{142}$$

cum rezultă din fig.27. De aici obținem relația căutată

$$n_2\gamma_2 = \frac{n_1 - n_2}{r} y_1 + n_1\gamma_1 \quad . \tag{143}$$

Remarcăm că această ecuație reprezintă de fapt relația punctelor conjugate a dioptrului sferic, adică ecuația (124), deoarece $\gamma_1 = y_1/p_1$ și $\gamma_2 = -y_1/p_2$ .
Transformările de refracție (141), (143) se pot scrie sub forma

$$\begin{cases} y_2 = 1 \cdot y_1 + 0 \cdot \Gamma_1 \\ \Gamma_2 = Q \cdot y_1 + 1 \cdot \Gamma_1 \end{cases} \quad , \tag{144}$$

sau, pe scurt, $V_2 = RV_1$ ,unde matricea pătratică $2x2$

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ Q & 1 \end{bmatrix}, \quad Q = \frac{n_1 - n_2}{r} \quad , \tag{145}$$

este ***matricea de refracție***. Mărimea Q, care conține toată informația cu privire la dioptru, adică $n_1, n_2, r$, poartă numele de ***putere de refracție***. Dacă $Q = 0$, adică dacă $n_1 = n_2$ sau $r \to \infty$, matricea de refracție devine matricea unitate astfel că $y_1 = y_2$, $\Gamma_1 = \Gamma_2$. Remarcăm că matricea de refracție este de modul unitate, adică $\det R = 1$. Relațiile dioptrului sferic sunt valabile și pentru oglinda sferică $(n_2 = -n_1)$ unde, de data aceasta, mărimea $Q = 2n_1/r$ poartă numele de ***putere de reflexie***.

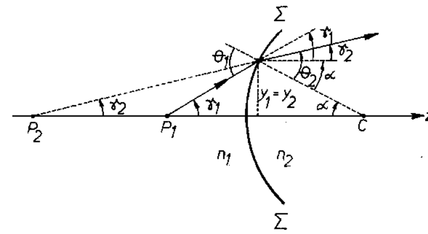


**Fig.27.** Descrierea matriceală a refracției în dioptrul sferic.

Să considerăm în continuare cazul general al trecerii unei raze paraxiale printr-un sistem optic centrat format din $m$ suprafețe sferice separate de $m-1$ medii de refringență

diferită (fig.28). Un astfel de sistem dioptric axial este definit între planul de intrare, tangent la vârful primei suprafețe refringente $\Sigma_1$ și planul de ieșire, tangent la vârful ultimei suprafețe refringente $\Sigma_m$ . Pe măsură ce raza de lumină progresează prin sistem, avem

$$V_1'' = R_1 V_1' \quad ,$$
$$V_2' = T_1 V_1'' = T_1 R_1 V_1' \quad ,$$
$$V_2'' = R_2 V_2' = R_2 T_1 R_1 V_1' \quad ,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$V_m'' = R_m V_m' = R_m T_{m-1} R_{m-1} \ldots R_2 T_1 R_1 V_1' \quad .$$

Ultima ecuație leagă vectorul de ieșire $V_m''$ de vectorul de intrare $V_1'$ prin ***ecuația de transfer***

$$V_m'' = S V_1' \quad , \qquad (146)$$

unde

$$S = R_m T_{m-1} R_{m-1} \ldots R_2 T_1 R_1 \qquad (147)$$

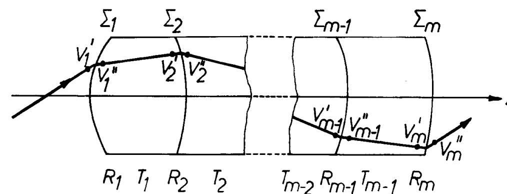



**Fig.28.** Trecerea unei raze paraxiale printr-un sistem optic centrat.

reprezintă ***matricea de transfer a sistemului***, definit între vârfurile (planele) sale de intrare și de ieșire. Remarcăm că matricea $S$ asociată sistemului reprezintă produsul matricelor individuale de refracție și de translație efectuat ***în ordine descrescătoare***, adică invers sensului în care lumina se propagă prin sistem. Întrucât matricele de refracție și de translație sunt matrice pătratice $2x2$ și de modul unitate, rezultă că și matricea produs este de același tip, adică are forma

$$S = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix} \quad , \qquad (148)$$

unde

$$\det S = S_{11} S_{22} - S_{12} S_{21} = 1 \quad . \qquad (149)$$

Elementele matricei $S$ conțin toată informația cu privire la parametrii sistemului optic și anume indicii de refracție, razele de curbură și grosimile dioptrilor componenți. Datorită relației (149), rezultă că numai trei din cele patru elemente ale matricei $S$ sunt independente iar acestea, cum vom arăta în secțiunile următoare, determină toate proprietățile sistemului ca instrument de format imagini. Proprietatea (149) permite o importantă verificare a corectitudinii calculelor, atât pe parcurs cât și în final. Astfel, pe măsură ce efectuăm produsul unui lung șir de matrice, este recomandabil să verificăm, din când în când, dacă determinantul matricei produs este egal cu unitatea. Dacă nu este, atunci înseamnă că s-a strecurat o eroare de calcul.

Datorită proprietății de asociativitate, în calculul practic al matricei $S$ avem la dispoziție mai multe moduri de a efectua produsul de matrice. Cel mai convenabil este să le asociem inițial în perechi. Cum însă, în cazul general, avem secvențe alternative de produse $RT$, în efectuarea calculelor trebuie să respectăm ordinea descrescătoare deoarece, cum se poate verifica imediat, produsul $RT$ nu este comutativ, adică $RT \neq TR$. Numai în cazurile

particulare de translații succesive prin straturi plan-paralele refringente sau de refracții succesive prin dioptri alipiți (lentile subțiri) produsele corespunzătoare sunt comutative și avem

$$S = \prod_{i=1}^{m} T_i = \begin{bmatrix} 1 & \sum_{i=1}^{m} t_i/n_i \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad , \tag{150}$$

respectiv

$$S = \prod_{i=1}^{m} R_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \sum_{i=1}^{m} Q_i & 1 \end{bmatrix} \quad . \tag{151}$$

Evident, schimbarea ordinii elementelor refringente componente afectează traiectoria razei în interiorul sistemului, dar nu și matricea $S$, astfel că relația dintre vectorul de ieșire și vectorul de intrare rămâne aceeași.

Pentru ilustrare, să calculăm matricea de transfer pentru o lentilă biconvexă de sticlă $(n_2 = 1,5)$, cu razele de curbură $r_1 = +2\,cm$ și $r_2 = -1\,cm$, de grosime $g = 0,5\,cm$, imersată în aer $(n_1 = n_3 = 1)$, fig.29,a. În acest caz

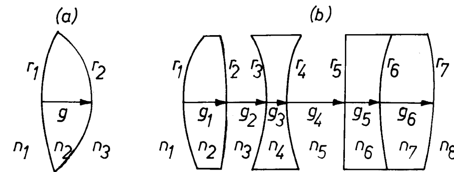



**Fig.29.** Pentru calcularea matricei de transfer a unei lentile (a) și a unui sistem Tessar (b).

$$S = R_2 T R_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ Q_2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & g/n_2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ Q_1 & 1 \end{bmatrix} \quad ,$$

unde $Q_1 = (n_1 - n_2)/r_1$, $Q_2 = (n_2 - n_3)/r_2$ . Introducând datele numerice și efectuând produsul matricelor obținem

$$S = \begin{bmatrix} 0,917 & 0,333 \\ -0,708 & 0,833 \end{bmatrix} . \tag{152}$$

Evident, avem $\det S = 1$ .

În mod similar se procedează pentru sisteme optice, oricât de complexe. Să considerăm, de exemplu, un ***sistem Tessar*** (fig.29,b), ale cărui date sunt listate în tabelul următor:

| Nr. | n | r (cm) | g (cm) |
|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1,628 | 0,357 |
| 2 | 1,6116 | -27,570 | 0,189 |
| 3 | 1 | -3,457 | 0,081 |
| 4 | 1,6053 | 1,582 | 0,325 |
| 5 | 1 | ∞ | 0,217 |
| 6 | 1,5123 | 1,920 | 0,396 |
| 7 | 1,6116 | -2,400 | |
| 8 | 1 | | |

Acest sistem este corectat de aberații geometrice (astigmatism și curbura câmpului) și cromatice, multe din obiectivele fotografice moderne fiind variante ale acestuia. În acest caz, matricea $S$ este dată de produsul a 13 matrice fundamentale și anume

$$S = R_7T_6R_6T_5R_5T_4R_4T_3R_3T_2R_2T_1R_1 \quad .$$

Calculul concret, ușor de efectuat cu ajutorul unui program Fortran, conduce la rezultatul

$$S = \begin{bmatrix} 0,867 & 1,338 \\ -0,198 & 0,848 \end{bmatrix}. \qquad (153)$$

Evident avem $\det S = 1$.

## § 2. 3. Elemente cardinale

Pentru analiza proprietăților de formare a imaginilor este convenabil să considerăm relația dintre doi vectori de stare ai razei, $V_1$ și $V_2$, în plane de referință oarecare, $z = z_1$ și respectiv $z = z_2$, în general altele decât planele tangente în vârfurile de intrare și de ieșire ale sistemului optic (vezi fig.30). Ecuația de transfer (146) se generalizează imediat în forma

$$V_2 = MV_1 \quad , \qquad (154)$$

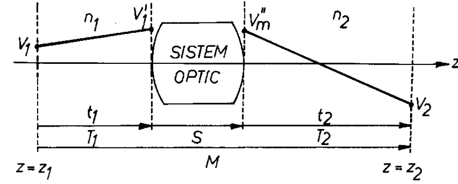



**Fig.30.** Pentru determinarea matricei de transfer a unui sistem centrat între două plane de referință oarecare ($z=z_1$ și $z=z_2$ ).

unde matricea de transfer între planele considerate este

$$M = T_2ST_1 = \begin{bmatrix} 1 & t_2/n_2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & t_1/n_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (155)$$

și are elementee

$$M_{11} = S_{11} + \frac{S_{21}}{n_2}t_2 \quad , \qquad (156)$$

$$M_{22} = S_{22} + \frac{S_{21}}{n_1}t_1 \quad , \qquad (157)$$

$$M_{21} = S_{21} \quad , \qquad (158)$$

$$M_{12} = \frac{S_{11}}{n_1}t_1 + \frac{S_{22}}{n_2}t_2 + \frac{S_{21}}{n_1n_2}t_1t_2 + S_{12} \quad , \qquad (159)$$

cu proprietatea

$$\det M = M_{11}M_{22} - M_{12}M_{21} = 1 \quad . \qquad (160)$$

Remarcăm invarianța elementului $S_{21}$ față de translația planelor de referință.

Ecuația de transfer (154) reprezintă transformările liniare

$$y_2 = M_{11}y_1 + M_{12}\Gamma_1, \qquad (161)$$

$$\Gamma_2 = M_{21}y_1 + M_{22}\Gamma_1. \qquad (162)$$

Conform proprietății (160) rezultă că pot fi nule cel mult două elemente ale matricei M. Să analizăm semnificația anulării, pe rând,a acestor elemente. Astfel, în cazul anulării unui element diagonal, ecuațiile (160), (161), (162) devin respectiv $\det M = -M_{12}M_{21} = -M_{12}S_{21} = 1$, $y_2 = M_{12}\Gamma_1$ (dacă $M_{11} = 0$ ), $\Gamma_2 = M_{21}y_1$ (dacă $M_{22} = 0$ ), de unde rezultă

$$y_1 = (n_2/S_{21})\gamma_2 \equiv -f_2\gamma_2 \qquad (\text{dacă } M_{22} = 0\ ), \qquad (163)$$

$$y_2 = -(n_1/S_{21})\gamma_1 \equiv f_1\gamma_1 \qquad (\text{dacă } M_{11} = 0\ ). \qquad (164)$$

Cum vom arăta puțin mai departe (vezi ecuațiile (182), (183)), mărimile

$$\begin{cases} f_1 \overset{def}{=} -n_1/S_{21}, \\ f_2 \overset{def}{=} -n_2/S_{21}, \end{cases} \qquad (165)$$

care depind numai de elementul $S_{21}$ al sistemului optic, au semnificația de ***distanțe focale*** obiect, respectiv imagine. Deocamdată, interpretarea geometrică a ecuațiilor (163), (164) rezultă din fig. 31 și anume, un fascicul homocentric de raze este transformat într-un fascicul paralel (fig.31,a) sau invers (fig.31,b). ***Poziția planelor focale*** (obiect, respectiv imagine) rezultă din condiția corespunzătoarea, $M_{22} = 0$ sau $M_{11} = 0$ , unde folosim expresiile (156), (157), adică

$$\begin{cases} t_{f_1} = -(n_1/S_{21})S_{22} \equiv f_1S_{22}, \\ t_{f_2} = -(n_2/S_{21})S_{11} \equiv f_2S_{11}. \end{cases} \qquad (166)$$

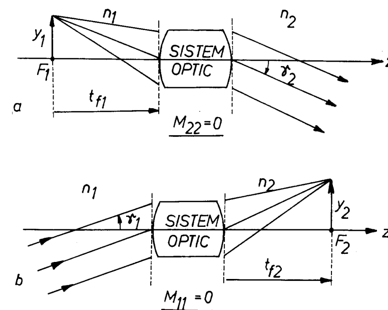



**Fig.31.** Interpretarea geometrică a ecuațiilor (163) și (164).

Intersecția planelor focale cu axul optic determină ***punctele focale*** sau ***focarele***, obiect $F_1$ respectiv imagine $F_2$ .

Să analizăm mai departe implicațiile anulării elementului 21 adică $M_{21} = S_{21} = 0$, astfel că planele focale (ecuațiile (166)) se deplasează la infinit, respectiv distanțele focale (ecuațiile (165)) devin infinite. Sistemele optice care au această proprietate poartă numele de ***sisteme afocale*** sau ***telescopice***. În acest caz, ecuațiile (156), (157) devin

$M_{11} = S_{11},\ M_{22} = S_{22}$ iar proprietatea (160) se scrie $\det M = M_{11}M_{22} = S_{11}S_{22} = 1$. Mai departe, din ecuația (162) rezultă $\Gamma_2 = S_{22}\Gamma_1$, adică

$$n_2\gamma_2 = S_{22}n_1\gamma_1 \quad . \tag{167}$$

Această relație exprimă proprietatea sistemelor optice afocale de transformare a unui fascicul paralel cu înclinarea $\gamma_1$ într-un fasciclul paralel cu înclinarea $\gamma_2$ (fig.32).

Cea mai importantă mărime ce caracterizează sistemele afocale este ***mărirea unghiulară***. Astfel, cum rezultă din ecuația (167), avem

$$m_u \overset{def}{=} \gamma_2/\gamma_1 = n_1S_{22}/n_2 \equiv n_1/n_2S_{11} \quad . \tag{168}$$

Remarcăm că, spre deosebire de orice alt sistem optic, pentru sisteme telescopice mărirea unghiulară este aceeași pentru toate razele de lumină.

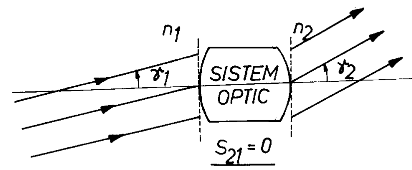



**Fig.32.** Sistem optic afocal (telescopic).

În fine, să analizăm semnificația condiției $M_{12} = 0$ . În acest caz, ecuația (160) devine $\det M = M_{11}M_{22} = 1$ , iar ecuația (161) se scrie

$$y_2 = M_{11}y_1 = \frac{1}{M_{22}}y_1 \quad . \tag{169}$$

Aceasta înseamnă că, indiferent de înclinarea $\Gamma_1$ , un fascicul conic cu vârful în planul $z = z_1$ este transformat într-un fascicul conic cu vârful în planul $z = z_2$ (vezi fig.33). Cu alte cuvinte, condiția $M_{12} = 0$ reprezintă ***condiția de stigmatism*** (în aproximația paraxială). Folosind expresia (159) a elementului $M_{12}$ obținem forma generală a ***relației planelor conjugate***

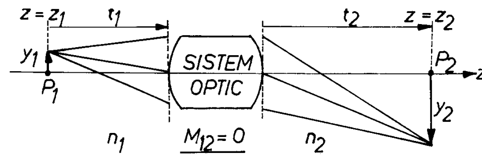



**Fig.33.** Interpretarea geometrică a relației $M_{12} = 0$ (plane conjugate).

$$\frac{n_1}{t_1}S_{22} + \frac{n_2}{t_2}S_{11} + \frac{n_1n_2}{t_1t_2}S_{12} + S_{21} = 0 \quad . \tag{170}$$

Planele conjugate intersectează axul optic în punctele conjugate obiect $P_1$ , respectiv imagine $P_2$ .

Remarcăm că dacă $t_2 \to \infty$ , atunci $t_1 \to t_{f_1}$ , iar dacă $t_1 \to \infty$ , atunci $t_2 \to t_{f_2}$ (vezi ecuația (166)). Prin urmare, fiecare plan focal este conjugat cu planul corespunzător de la infinit. Planele focale înseși nu formează o pereche de plane conjugate deoarece $t_{f_1}$ și $t_{f_2}$ nu verifică simultan relația (170) a planelor conjugate.

Ecuația (169) furnizează direct ***mărirea liniară transversală***

$$m_t \overset{def}{=} \frac{y_2}{y_1} = M_{11} = \frac{1}{M_{22}} \tag{171}$$

sau, folosind expresiile (156), (157) și definiția distanțelor focale (165),

$$\begin{cases} m_t = S_{11} + \frac{S_{21}}{n_2} t_2 \equiv S_{11} - \frac{t_2}{f_2}, \\ m_t^{-1} = S_{22} + \frac{S_{21}}{n_1} t_1 \equiv S_{22} - \frac{t_1}{f_1}. \end{cases} \tag{172}$$

Observăm că, deoarece întotdeauna $M_{21} = S_{21}$ , ecuația (158), matricea de transfer între două plane conjugate are următoarea structură

$$M_{P_1P_2} = \begin{bmatrix} m_t & 0 \\ S_{21} & m_t^{-1} \end{bmatrix} \quad . \tag{173}$$

Prin definiție, ***planele principale*** ale sistemului optic reprezintă acea pereche de plane conjugate pentru care mărirea liniară transversală are valoarea $m_t = +1$ , adică imaginea are aceeași mărime și același sens cu obiectul. ***Poziția planelor principale*** (obiect, respectiv imagine) rezultă deci din condițiile $M_{11} = M_{22} = 1$ unde folosim expresiile (156), (157), adică

$$\begin{cases} t_{p_1} = -\frac{n_1}{S_{21}}(S_{22} - 1) \equiv f_1(S_{22} - 1), \\ t_{p_2} = -\frac{n_2}{S_{21}}(S_{11} - 1) \equiv f_2(S_{11} - 1). \end{cases} \tag{174}$$

Ne putem convinge că pozițiile (174) verifică, într-adevăr, relația planelor conjugate (170), ele fiind chiar prin definiție perechea conjugată pentru care $m_t = +1$ . Intersecția planelor principale cu axul optic determină ***punctele principale*** obiect $H_1$ , respectiv imagine $H_2$ . Distanța $H_1H_2$ dintre planele principale poartă numele de ***interstițiu***.

Din expresiile (165), (166), (174) rezultă următoarele relații generale între pozițiile punctelor focale și principale și distanțele focale

$$\begin{cases} t_{f_1} - t_{p_1} = f_1, \\ t_{f_2} - t_{p_2} = f_2. \end{cases} \tag{175}$$

Remarcăm că matricea de transfer (173) scrisă pentru perechea de plane principale $(m_t = +1)$ , capătă forma simplă a matricei fundamentale pentru un dioptru sferic (vezi ecuația (145)), adică

$$M_{H_1H_2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ S_{21} & 1 \end{bmatrix} \quad . \tag{176}$$

În continuare, vom folosi această proprietate remarcabilă pentru a simplifica formulele, adoptând convenția măsurării distanței $p_1$ a obiectului, și $p_2$ a imaginii, față de planul principal respectiv (fig.34). Matricea de transfer între planele conjugate se scrie deci

$$M = T_2 M_{H_1 H_2} T_1 = \begin{bmatrix} 1 & p_2/n_2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ S_{21} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & p_1/n_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad , \tag{177}$$

și are elementele mai simple decât matricea (155), adică

$$M_{11} = 1 + \frac{S_{21}}{n_2} p_2 \equiv 1 - \frac{p_2}{f_2} \quad , \tag{178}$$

$$M_{22} = 1 + \frac{S_{21}}{n_1} p_1 \equiv 1 - \frac{p_1}{f_1} \quad , \tag{179}$$

$$M_{21} = S_{21} \quad , \tag{180}$$

$$M_{12} = \frac{p_1}{n_1} + \frac{p_2}{n_2} + S_{21} \frac{p_1 p_2}{n_1 n_2} \equiv -\frac{1}{S_{21}} \left( \frac{p_1}{f_1} + \frac{p_2}{f_2} - \frac{p_1 p_2}{f_1 f_2} \right) \quad . \tag{181}$$

Condiția de stigmatism $M_{12} = 0$ conduce la ***generalizarea formulei Huygens-Gauss*** în forma dedusă pentru dioptrul sferic, ecuația (128), adică

$$\frac{f_1}{p_1} + \frac{f_2}{p_2} = 1 \ , \tag{182}$$

unde distanțele focale $f_1, f_2$ au expresiile (165). De asemenea, folosind transformarea (vezi formula (129))

$$\begin{cases} p_1 = \zeta_1 + f_1, \\ p_2 = \zeta_2 + f_2, \end{cases}$$

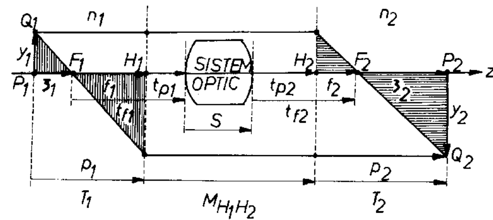



**Fig.34.** Planele principale ale unui sistem optic și utilizarea lor pentru construirea imaginilor.

unde segmentele $\zeta_1$, $\zeta_2$ determină poziția punctelor conjugate $P_1, P_2$ față de focarul corespunzător (vezi fig.34), din ecuația (182) rezultă ***generalizarea formulei lui Newton***

$$\zeta_1 \zeta_2 = f_1 f_2 \quad . \tag{183}$$

***Mărirea liniară transversală*** $m_t = M_{11} = 1/M_{22}$ , ecuația (171), cu elementele $M_{11}, M_{22}$ ale matricii (177), are expresiile

$$\begin{cases} m_t = 1 + \dfrac{S_{21}}{n_2} p_2 \equiv 1 - \dfrac{p_2}{f_2} = -\dfrac{\zeta_2}{f_2}, \\ m_t^{-1} = 1 + \dfrac{S_{21}}{n_1} p_1 \equiv 1 - \dfrac{p_1}{f_1} = -\dfrac{\zeta_1}{f_1}, \end{cases} \tag{184}$$

adică

$$m_t \overset{def}{=} \frac{y_2}{y_1} = -\frac{f_1}{\zeta_1} = -\frac{\zeta_2}{f_2} \quad . \tag{185}$$

Aceste relații rezultă și direct din geometria figurii 34 (din asemănarea triunghiurilor hașurate la fel). Alternativ, eliminând $S_{21}$ , mai avem

$$m_t \overset{def}{=} \frac{y_2}{y_1} = -\frac{n_1}{n_2} \cdot \frac{p_2}{p_1} \quad . \tag{186}$$

Expresiile (185), (186) generalizează pe cele deduse pentru dioptrul sferic, (132), (133).

Punctele și planele focale și principale determină complet transformarea razelor paraxiale de către sistemul optic, de unde și denumirea acestora de ***elemente cardinale***. Pentru ilustrare, fig. 34 prezintă construcția grafică a imaginii cu ajutorul celor patru puncte cardinale $F_1, F_2, H_1, H_2$ și a două raze de construcție care trec prin focare (***raze principale***). Regula de construcție este simplă: orice rază venind din stânga și care este paralelă cu axul optic este deviată la intersecția cu planul principal imagine (determinat de $H_2$ ) și trece prin $F_2$ ; orice rază venind din stânga și care trece prin $F_1$ este deviată la intersecția cu planul principal obiect (determinat de $H_1$) și iese paralel cu axul optic. Evident, construcția imaginii cu ajutorul razelor de lumină reale (care trec efectiv prin sistem) reprezintă, în general, o sarcină mult mai dificilă.

Punctele cardinale, obiectul și imaginea pot avea și altă ordine decât cea considerată în fig.34. Să aplicăm aceeași metodă a razelor principale pentru ordinea reprezentată în fig.35, adică $F_1$ , obiect, $H_2$, $H_1$, $F_2$ . Spre deosebire de fig.34, unde imaginea este reală (razele de lumină se intersectează efectiv în punctul $Q_2$), în cazul de față imaginea este virtuală deoarece razele nu trec efectiv prin punctul $Q_2$ dar, la ieșirea din sistem, se comportă ca și cum ar proveni din $Q_2$ .

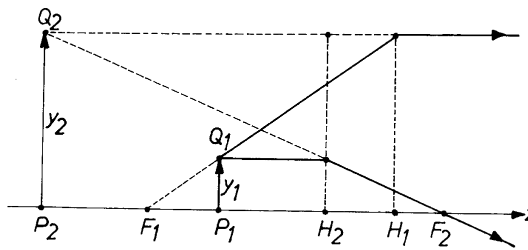


**Fig.35.** O altă situație posibilă privind poziția planelor principale.

În general, nu există o ordine apriorică a punctelor cardinale astfel că, dacă toate sunt distincte, există $4! = 24$ de posibilități diferite de a le așeza pe axul optic. Luând mai departe în considerare și poziția obiectului, rezultă $5! = 120$ de cazuri diferite de construcție grafică a imaginilor, din care două au fost prezentate în fig.34 și 35.

Desigur, folosind proprietățile elementelor cardinale putem trasa traiectoria oricăror raze de construcție (nu neapărat principale) și construi imaginea direct cu ajutorul a două raze arbitrare, cum se arată în fig.36. Astfel, o rază incidentă oarecare $Q_1 I_1$ poate fi considerată ca făcând parte dintr-un fascicul paralel de raze, dintre care una trece prin focarul $F_1$ . Punctul de

focalizare $F$ al fasciculului paralel cu raza $Q_1I_1$ se găsește la intersecția razei care trece prin $F_1$ cu planul focal imagine (determinat de $F_2$). În acest fel se stabilește direcția razei emergente $I_2F$, conjugată cu raza $Q_1I_1$. În mod similar se construiește orice altă rază $J_2G$, conjugată cu $Q_1J_1$ și, prin aceasta, imaginea $Q_2$ a lui $Q_1$.

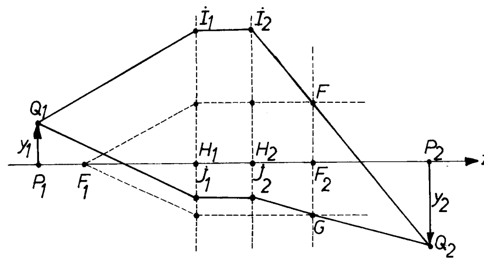


**Fig.36.** Construirea imaginii $P_2$ $Q_2$ a obiectului $P_1$ $Q_1$ într-un sistem centrat, cunoscând și poziția planelor focale.

Construcțiile grafice cu ajutorul punctelor cardinale demonstrează geometric relațiile stabilite mai înainte pe cale analitică. Astfel, fig.37 ilustrează modul în care un fascicul conic de raze cu vârful în punctul $Q_1(y_1)$, situat în planul focal obiect, este transformat într-un fascicul paralel cu înclinarea $\gamma_2$, astfel că $y_1 = -f_2\gamma_2$ (vezi ecuația (163)), precum și problema inversă, privind transformarea unui fascicul paralel de raze cu înclinarea $\gamma_1$ într-un fascicul conic cu vârful în punctul $Q_2(y_2)$, situat în planul focal imagine, astfel că $y_2 = f_1\gamma_1$ (vezi ecuația (164)).

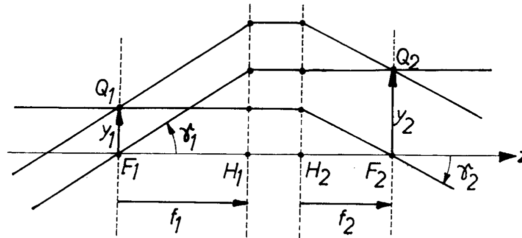


**Fig.37.** Trecerea unui fascicul conic sau paralel, de raze, printr-un sistem centrat (conjugarea planelor focale cu planele de la infinit).

În continuare, vom demonstra geometric ***teorema punctelor nodale*** conform căreia există o pereche de puncte axiale conjugate $N_1, N_2$, astfel că oricărei raze incidente orientate spre punctul nodal obiect, $N_1$, îi corespunde o rază emergentă paralelă care vine dinspre punctul nodal imagine, $N_2$. Astfel, fie un fascicul conic de raze cu vârful într-un punct oarecare $Q_1$ din planul focal obiect (vezi fig.38). Acest fascicul este transformat de sistemul optic într-un fascicul paralel cu raza $I_2F_2$. Dintre toate razele care pornesc din punctul $Q_1$, numai una singură este paralelă cu razele emergente (*cu* $I_2F_2$), și anume raza care se propagă pe direcția $Q_1J_1$. Această rază intersectează axul optic în $N_1$, iar raza emergentă corespunzătoare $J_2N_2$ în $N_2$. Dar, din egalitatea triunghiurilor $Q_1F_1N_1$ și $I_2H_2F_2$, respectiv $J_1H_1N_1$ și $J_2H_2N_2$, rezultă $F_1N_1 = f_2$, $N_2F_2 = f_1$, relații independente pe poziția punctului $Q_1$. Cu alte cuvinte, poziția punctelor nodale $(N_1, N_2)$ este determinată ***numai*** de poziția focarelor $(F_1, F_2)$ și de distanțele focale $(f_1, f_2)$. Putem transcrie relațiile obținute în forma

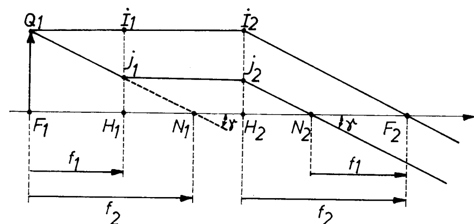


**Fig.38.** Punctele nodale ale unui sistem centrat ($N_1$, $N_2$).

$$\begin{cases} t_{f_1} - t_{n_1} = f_2, \\ t_{f_2} - t_{n_2} = f_1, \end{cases} \tag{187}$$

unde $t_{n_1}, t_{n_2}$ reprezintă ***pozițiile punctelor nodale*** (obiect, respectiv imagine). Expresiile lor se obțin introducând în ecuațiile (187) distanțele focale (ecuațiile (165)) și pozițiile punctelor focale (ecuațiile (166)). Punctele nodale $N_1, N_2$ pot de asemenea să fie folosite ca puncte cardinale pentru construcția imaginilor.

Pentru conveniență să recapitulăm expresiile ***elementelor cardinale***:

$$\begin{cases} f_1 = -n_1/S_{21}, \\ f_2 = -n_2/S_{21}, \\ t_{f_1} = -n_1 S_{22}/S_{21} = f_1 S_{22}, \\ t_{f_2} = -n_2 S_{11}/S_{21} = f_2 S_{11}, \\ t_{p_1} = n_1(1 - S_{22})/S_{21} = f_1(S_{22} - 1), \\ t_{p_2} = n_2(1 - S_{11})/S_{21} = f_2(S_{11} - 1), \\ t_{n_1} = (n_2 - n_1 S_{22})/S_{21} = f_1[S_{22} - n_2/n_1], \\ t_{n_2} = (n_1 - n_2 S_{11})/S_{21} = f_2[S_{11} - n_1/n_2]. \end{cases} \tag{188}$$

Toate aceste mărimi depind numai de trei elemente $(S_{11}, S_{22}, S_{21})$ ale matricei de transfer $S$ asociată sistemului (elementul $S_{12}$ nu este independent deoarece $\det S = S_{11}S_{22} - S_{21}S_{12} = 1$), precum și de indicii de refracție ai spațiului obiect $(n_1)$, respectiv imagine $(n_2)$. În particular, dacă $n_1 = n_2$, atunci $f_1 = f_2$, $t_{p_1} = t_{n_1}$ și $t_{p_2} = t_{n_2}$. Distanțele focale $f_1, f_2$ depind numai de elementul $S_{21}$ care, dacă sistemul este imersat în aer $(n_1 = n_2 = 1)$ reprezintă chiar convergența sistemului cu semnul schimbat.

Unele puncte cardinale se pot stabili ușor și experimental. Astfel, punctele focale $F_1, F_2$ sunt date de poziția imaginii unui obiect îndepărtat. De asemenea, punctele nodale $N_1, N_2$ pot fi localizate grație proprietății conform căreia un fascicul paralel rămâne focalizat în același punct dacă sistemul optic este rotit în jurul lui $N_1$, respectiv al lui $N_2$. În cazul dioptrului sferic, ecuația (145), sau al dioptrilor alipiți (lentile subțiri), ecuația (151), avem $S_{11} = S_{22} = 1$ astfel că

$t_{f_1} = f_1,\ t_{f_2} = f_2$ și $t_{p_1} = t_{p_2} = 0$

adică planele principale coincid cu planul tangent în vârful dioptrului, respectiv în vârful comun al dioptrilor alipiți.

În general, schema optică echivalentă a oricărui sistem optic centrat, cu ajutorul căreia, folosind reguli cunoscute, putem construi grafic imaginile, este reprezentată de punctele sale cardinale. La rândul lor, acestea se determină din elementele matricei de

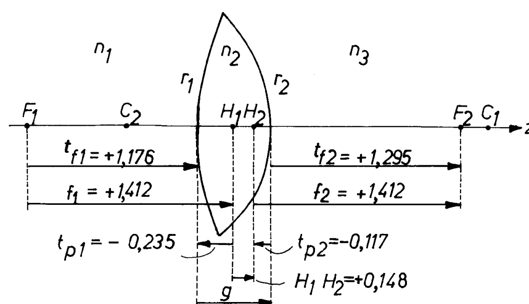



**Fig.39.** Elementele cardinale ale lentilei din fig.1.29, a.

transfer, ecuațiile (188), calculate din datele sistemului concret. Evident, un set de puncte cardinale definește o mulțime de sisteme concrete diferite dar echivalente din punctul de vedere al construcției imaginilor.

În încheierea acestei secțiuni vom ilustra calculul elementelor cardinale pentru trei sisteme optice concrete: o lentilă simplă, un sistem ocular compus din două lentile și un sistem mult mai complex, ochiul uman.

a) Fie lentila biconvexă de sticlă considerată în fig.29, a și pentru care am calculat deja matricea de transfer, ecuația (152). Din ecuațiile (188) obținem imediat elementele cardinale reprezentate în fig.39, unde datele numerice sunt exprimate în centimetri.

b) În exemplul următor vom considera sistemul ***ocular de tip Ramsden*** ale cărui caracteristici sunt date în tabelul următor:

| Nr. | n | r (cm) | g (cm) |
|---|---|---|---|
| 1 | 1 | ∞ | 0,15 |
| 2 | 1,5 | -0,5 | 0,60 |
| 3 | 1 | +0,5 | 0,15 |
| 4 | 1,5 | ∞ | |
| 5 | 1 | | |

Calculul matricei $S = R_4 T_3 R_3 T_2 R_2 T_1 R_1$ conduce la rezultatul

$$S = \begin{bmatrix} 0,260 & 0,666 \\ -1,400 & 0,260 \end{bmatrix}.$$

Conform ecuațiilor (188) avem

$$t_{f_1} = -S_{22}/S_{21} = +0,186 \ cm,$$

$$t_{f_2} = -S_{11}/S_{21} = +0,186 \ cm,$$

$$t_{p_1} = (1 - S_{22})/S_{21} = -0,528 \ cm,$$

$$t_{p_2} = (1 - S_{11})/S_{21} = -0,528 \ cm,$$

$$f_1 = f_2 = -1/S_{21} = +0,714 \ cm,$$

rezultate reprezentate în fig.40. Remarcăm că $H_1$ se află în dreapta lui $H_2$.

c) Structura și proprietățile ***ochiului uman*** impun o serie de cerințe pentru proiectarea aparatelor vizuale. Acesta reprezintă un sistem optic centrat convergent, format dintr-o serie de dioptri practic sferici (fig.41). Mediile transparente succesive sunt ***cornea, umoarea apoasă*** $(n = 1,336)$, ***lentila cristalinului*** și ***umoarea vitroasă*** $(n = 1,336)$. Apertura cristalinului (***pupila***) este controlată de o diafragmă (***irisul***) și are un diametru de 2-8 mm, în funcție de intensitatea luminii. Sistemul optic al ochiului este complicat datorită structurii neomogene a cristalinului. Acesta reprezintă o lentilă biconvexă, formată din circa 20000 de straturi transparente succesive, al căror indice de refracție variază de la $n \approx 1,405$ în

straturile periferice până la $n \approx 1,454$ în centru.* Prin acțiunea ***mușchilor ciliari*** razele de curbură ale lentilei ***cristalinului*** variază în anumite limite, cea mai mare schimbare producându-se în curbura suprafeței sale frontale.
Prin aceasta cristalinul se comportă ca o lentilă de distanță focală variabilă, permițând ***acomodarea ochiului*** astfel ca imaginea obiectelor vizate să se formeze întotdeauna pe retină. Cea mai mare putere de refracție a ochiului este localizată la suprafața corneei (care separă aerul de umoarea apoasă) dar variațiile acestei puteri, necesare pentru controlul acomodării, sunt cauzate de deformarea lentilei cristalinului. Când mușchii ciliari sunt relaxați, curbura cristalinului este cea mai mică, respectiv distanța sa focală este maximă, astfel că pe retină se focalizează imaginea obiectelor celor mai îndepărtate (***punctum remotum***). Spunem, în acest caz, că ochiul nu este acomodat. Pentru a focaliza pe retină obiecte din ce în ce mai apropiate, lentila cristalinului trebuie să se bombeze din ce în ce mai mult, până la o acomodare maximă, corespunzătoare unei ***distanțe minime de vedere distinctă (punctum proximum)*** și care, pentru ***ochiul normal***, este de circa 25 cm.

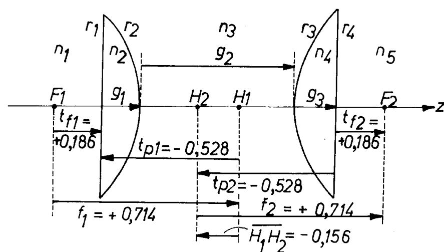



**Fig.40.** Elementele cardinale ale unui ocular de tip Ramsden.

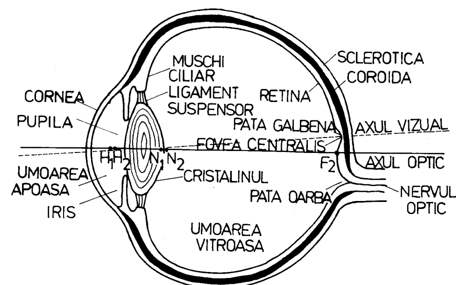



**Fig.41.** Structura ochiului uman.

Proprietăți apropiate de ochiul real se realizează considerând corneea ca pe o simplă suprafață refringentă între aer $(n_1 = 1)$ și umoarea apoasă $(n_2)$ ,iar cristalinul ca pe o lentilă omogenă $(n_3)$ imersată între umoarea apoasă $(n_2)$ și umoarea vitroasă $(n_4)$ Un astfel de model, pentru ochiul neacomodat (relaxat), denumit și ***ochiul schematic al lui Gullstrand***, are datele următoare:

| Nr. | n | r (mm) | g (mm) |
|---|---|---|---|
| 1 | 1 | +7,8 | 3,6 |
| 2 | 1,336 | -10,0 | 3,6 |
| 3 | 1,413 | -6,0 | |
| 4 | 1,336 | | |

Elementele cardinale ale acestui sistem, conform ecuațiilor (188) sunt

$$f_1 = +1,678\ cm; \qquad f_2 = +2,242\ cm;$$

$$t_{f_1} = +1,531\ cm; \qquad t_{f_2} = +1,697\ cm;$$

* Cercetările privind mediile cu structură gradată (continuă) a indicelui de refracție sunt foarte actuale (vezi Capitolul III)

$$t_{p_1} = -0,147\ cm; \qquad t_{p_2} = -0,545\ cm;$$

$$t_{n_1} = -0,711\ cm; \qquad t_{n_2} = +0,019\ cm;$$

Observăm că $H_1H_2 = N_1N_2 = 0,028\ cm$ , dar pentru multe aplicații, putem considera că punctele principale, respectiv punctele nodale, coincid (vezi fig.41). Desigur, valoarea elementelor cardinale se modifică întrucâtva față de datele de mai sus atunci când cristalinul se acomodează pentru a focaliza pe retină obiecte aflate la distanță finită.

*Retina*, aflată pe fundul ochiului, reprezintă ecranul de proiecție a imaginilor obiectelor exterioare. Aceasta constă dintr-un mozaic de elemente fotosensibile, circa 130 milioane de "bastonașe" și 7 milioane de "conuri", perpendiculare pe suprafața retinei și conectate la creier prin nervul optic. Punctul de ieșire al nervului optic din ochi nu conține fotoreceptori (***pata oarbă***). Conurile sunt responsabile pentru ***vederea diurnă*** și pentru senzația de culoare, funcționând ca granulația foarte fină a unui film color, iar bastonașele sunt responsabile pentru ***vederea crepusculară***. Densitatea superficială de conuri crește pe măsură ce ne apropiem de ***pata galbenă*** sau ***macula***, reprezentând o depresiune în retină, și atinge valoarea maximă de circa 180000 conuri/ $mm^2$ în mijlocul acesteia, pe o arie de aproximativ 0,2 mm diametru, denumită ***fovea centralis***. Pentru comparație, observăm că imaginea pe retină a Lunii pline are un diametru tot de aproximativ 0,2 mm, conform formulei generale (vezi ecuația (164))

$$y_2 = f_1\gamma_1 \quad , \tag{164}$$

(vezi și fig.37), cu $f_1 \approx 17\ mm$ dată de tabelul prezentat anterior. Imaginea obiectului observat se formează întotdeauna în fovea centralis, care furnizează cea mai fină și detaliată informație și determină, împreună cu punctele nodale, ***axul vizual*** al ochiului. În aria foveală distanța medie dintre centrele conurilor vecine este de circa $2,5 \cdot 10^{-6}\,m$. Admițând ipoteza că două puncte imagine sunt recepționate ca distincte dacă sunt separate de cel puțin un con neexcitat, adică luând $(y_2)_{\min} \approx 5 \cdot 10^{-6}\,m$, rezultă ***limita de rezoluție unghiulară a ochiului***

$$(\gamma_1)_{\min} = \frac{(y_2)_{\min}}{f_1} = \frac{5 \cdot 10^{-6}}{1,7 \cdot 10^{-2}}rad = \frac{1}{3400}rad \approx 1' \quad , \tag{189}$$

rezultat care concordă foarte bine cu estimările fiziologice privind ***acuitatea vizuală*** $\overset{def}{=} 1/(\gamma_1)_{\min}$ ***a ochiului normal***.

**Alte aspecte fizice și fiziologice privind funcționarea ochiului uman ca receptor optic.** După recapitularea elementelor principale ale structurii ochiului uman, este bine să aprofundăm câteva din aspectele sale funcționale, deosebit de importante din punct de vedere practic.

Așa cum se știe, din cauza aberațiilor geometrice (vezi și paragraful 2.8) ale sistemelor de format imagini, apar abateri de la stigmatism și niciodată imaginea unui punct obiect nu este chiar un punct ci o pată luminoasă cu o anumită extindere spațială. Este firesc, deci, să ne întrebăm dacă ochiul uman, ca sistem optic, prezintă aberații de astigmatism și dacă da, cât sunt ele de supărătoare? Răspunsul la prima întrebare este afirmativ căci imaginea

unui obiect punctiform nu este în realitate ***niciodată*** un punct. Este acest lucru deranjant? Răspunsul este de data aceasta negativ, iar explicația constă în aceea că, în cazul ochiului, imaginea de pe retină a punctului obiect este cu mult mai mică decât $y_{2\,min} \approx 5\,microni$. De aceea, ***acuitatea vizuală*** (sau ***puterea separatoare*** - cum se mai numește unoeri) a ochiului normal este determinată de structura celulară* a retinei și nu este influențată de aberațiile de astigmatism.

Nici fenomenele de difracție nu dau efecte supărătoare în observația vizuală. Pentru a putea înțelege mai exact această afirmație, să calculăm diametrul petei de difracție (așa-numitul ***disc Airy***) produse de pupilă, adică de diafragma ochiului. Dacă pupila are diametrul $D = 2R$, deschiderea unghiulară a petei de difracție este $\gamma_1 = 1,22\,\lambda/D$. Luând $\lambda = 550\,nm$ (la mijlocul spectrului vizibil) și $D = 2\,mm$ (valoarea ***minim posibilă*** a diametrului pupilar) obținem $\gamma_{1\,max}^{(difr.)} = 3,355 \cdot 10^{-4}\,rad \approx 1'09''$, adică o valoare de ordinul de mărime al limitei de rezoluție unghiulară a ochiului (vezi relația (189)). La diametre pupilare mai mari (până la aproximativ 8 mm), unghiul $\gamma_1^{(difr.)}$ este mai mic decât $(\gamma_1)_{min}^{(difr)}$ și pata de difracție se formează în interiorul unei singure celule retiniane. Ori, așa cum am mai spus, detaliile ce se proiectează pe o singură celulă nu se disting, nu se separă, motiv pentru care nici petele de difracție, generate prin difracția pe apertura pupilară, nu sunt deranjante.

Cunoscând valoarea lui $(\gamma_1)_{min}$, nu este lipsit de interes să calculăm distanța limită $(y_1)_{min}$ dintre două puncte obiect, situate la diferite distanțe $|p_1|$ față de ochi, care mai pot fi observate separat. Dacă $|p_1| = 25\,cm$ (distanța minimă de vedere distinctă, corespunzătoare punctului proxim), avem $(y_1)_{min} = |p_1| \cdot (\gamma_1)_{min} = 0,074\,mm$ și $(y_1)_{min}$ crește odată cu creșterea lui $|p_1|$. Pentru a distinge două puncte situate la distanța $y_1 = 1\,mm$ între ele, este necesar ca ele să fie privite de la o distanță mai mică decât $|p_1|_{max} = 1/(\gamma_1)_{min} = 3,4\,m$

Pentru determinarea experimentală a acuității vizuale a ochiului se pot folosi mai multe procedee și dispozitive: inelul lui Landolt, mira lui Foucault, litera E Snellen, sau alfabetică etc. În continuare, ne vom referi numai la inelul lui Landolt (1874). Este vorba de un inel circular întrerupt, ca litera C de tipar, de culoare neagră pe fond alb, al cărui diametru exterior (interior) este de cinci (trei) ori mai mare decât deschiderea sa. Inelul, care

dă acuitatea vizuală teoretică normală, este astfel plasat încât are diametrul unghiular exterior de $5'$ și deschiderea de $1'$.

Acuitatea vizuală se stabilește simplu, în funcție de distanța de la care observatorul, privind cu un singur ochi, mai distinge întreruperea inelului.**

Se numește ***distanță de acomodare*** distanța $|p_1|$ a obiectului a cărei imagine se proiectează pe retină prin reglarea razelor de curbură ale cristalinului. Pentru un ochi normal, distanța de acomodare $|p_1|$ variază între $\infty$ și 0,25 m. Pentru un ochi ***miop***, când $|p_1| = \infty$, imaginea se formează în fața retinei (ochiul miop nu se poate acomoda pentru infinit). La un

---

* O "celulă" retiniană este un hexagon închis într-un cerc cu diametrul egal cu $y_2 \approx 5.10^{-6}$ m; două "celule" vecine au în centru câte un con și sunt separate între ele tot printr-un con.

În acest model, cel puțin în zona foveală, structura retinei seamănă cu un fagure. Fiecare "celulă" transmite creierului câte o singură informație (iluminarea medie a celulei).

** Pentru detalii privind măsurarea acuității vizuale, recomandăm lucrarea P. Cernea, ***Fiziologie oculară***, Editura Medicală, București, 1986 (Cap. XII).

ochi ***hipermetrop***, tot pentru $|p_1| = \infty$, imaginea se formează în spatele retinei. Miopia se corectează cu ochelari cu lentile divergente iar hipermetropia - cu lentile convergente, aducându-se imaginea pe retină.

Caracterul finit al acuității vizuale a ochiului are consecințe și aplicații extrem de importante care este bine să fie cunoscute. În primul rând, din această cauza, lucru pe care l-am subliniat și într-un aliniat anterior, caracterul aproximativ stigmatic (mai exact - nestigmatic) al imaginilor date de majoritatea instrumentelor, cu care ne confruntăm în practică, nu este supărător (decât dacă aberațiile sunt foarte mari). Pentru a înțelege mai bine esența acestei afirmații, să ne referim la observarea imaginii de pe ecranul unui televizor. Se știe că, de regulă, această imagine este formată din 625 fâșii (linii) paralele. Dacă înălțimea ecranului este h, lățimea unei fâșii este evident h/625. Când privim de la distanța $|p_1|$, fiecare fâșie se vede sub un unghi egal cu h/625 $|p_1|$ radiani. Pentru a nu observa discontinuitățile de pe ecran, este necesar ca acest unghi să fie inferior valorii $(\gamma_1)_{min} = 1/3400$ radiani (la ochiul normal). Astfel, rezultă cu necesitate $|p_1| > 5,44h$ . La un receptor Tv obișnuit, cu $h = 34\,cm$, obținem $|p_1| > 1,85$ metri. În realitate, la unele persoane, limita de rezoluție unghiulară $(\gamma_1)_{min}$ poate coborî sub valoarea "standard" de $1'$ (până la $10''$ ) și din această cauză distanța $|p_1|$ trebuie mărită corespunzător.

Cele învățate prin acest exemplu ne arată că și tablourile (picturile) au o distanță optimă de la care trebuie privite. De la distanțe mai mici, se văd prea multe detalii tehnice (de aplicarea vopselei pe pânză etc.), în schimb "nu se vede" tabloul în ansamblul său. Pe de altă parte, la citit și la lucru, se preferă, de obicei, o distanță de observare mai mică decât cea teoretică, chiar dacă, procedând în acest mod, se pot vedea și amănunte neinteresante (praf, pete, porozități ale hârtiei etc.). Ca regulă generală practică se recomandă folosirea unui unghi $\gamma_1$ cuprins în intervalul $(1 \div 5)(\gamma_1)_{min}$ .

Un alt aspect practic, de mare însemnătate, este cel al ***adâncimii (profunzimii) câmpului vizual***. Se știe că, în afara punctelor obiect situate la distanța de acomodare, ochiul poate vedea clar și puncte situate la distanțe mai mari sau mai mici decât aceasta. Adâncimea câmpului vizual este tocmai distanța dintre limitele (superioară și inferioară) acestui domeniu. Să considerăm ochiul din fig.42, acomodat pentru distanța a, respectiv pentru planul ($\pi$). Neglijând aberațiile geometrice și difracția (am văzut de ce!), presupunem că imaginea pe retină a punctului O, din planul ($\pi$), este un punct P. Fie $O'$ un alt punct obiect, situat la distanța $a'$ ($\neq$ a) față de ochi și cerem ca imaginea sa pe retină să fie o pată corespunzând unghiului $(\gamma_1)_{min}$ . Razele exterioare ale fasciculului conic de lumină, care formează această imagine, intersectează planul de acomodare ($\pi$) după un cerc AB. Pata de pe retină este chiar imaginea acestui cerc, de diametru $a \cdot (\gamma_1)_{min} \equiv AB$ . Din asemănarea triunghiurilor O'AB, O'MN, obținem ușor

$$\frac{D}{a'} = \frac{a(\gamma_1)_{min}}{\pm(a' - a)} \qquad ((+)\ pentru\ a' > a;\ (-)\ pentru\ a' < a)\ ,$$

sau

$$\frac{1}{a'} = \frac{1}{a} \mp \frac{(\gamma_1)_{min}}{D} \quad .$$

Pentru valoarea minimă a diametrului pupilar, $D = 2\,mm$, ultimul termen are valoarea $(\gamma_1)_{min}/D = 0,147$ dioptrii și rezultă imediat

$$a' = \frac{a}{1 \mp 0,147a} \quad . \tag{190}$$

Când ochiul este acomodat pentru infinit ($a = \infty$) obținem $a' = \mp 6,8\ m$ (se aproximează cu 7 m), semnul (+) corespunzând obiectelor ***reale*** iar semnul (-) obiectelor ***virtuale***. Aceasta ne arată că, un ochi standard, neîncordat, poate vedea concomitent, suficient de clar, obiecte reale situate la distanțe mai mari de 7 m și obiecte virtuale, din spate, tot de la distanțe mai mari de 7 m (vezi fig.43).

La încordarea maximă, când $a = 0,25\ m$ (punctum proximum), din formula dedusă obținem $a' = 24,1\ cm$, respectiv $a' = 26\ cm$.

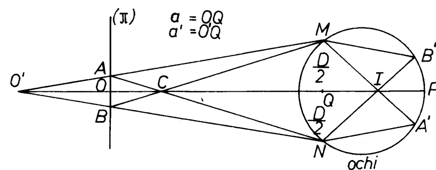



**Fig.42.** Determinarea profunzimii câmpului vizual al ochiului uman.

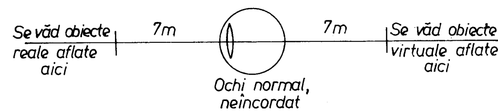



**Fig.43.** Domeniile din care vede ochiul uman normal, neîncordat (obiecte reale sau virtuale).

În cazul folosirii instrumentelor optice (lunete, telescoape, microscoape etc.), problema adâncimii câmpului vizual trebuie analizată separat deoarece ea este dependentă și de grosismetrul G al instrumentului. La utilizarea unui microscop, de exemplu, adâncimea câmpului vizual este practic nulă (vezi paragraful 2.5).

Subliniem că cele discutate aici sunt valabile numai pentru situația în care imaginea se formează în zona foveală a retinei, adică în adâncimea petei galbene, cu un diametru de aproximativ 0,2 mm. Față de centrul optic al cristalinului, fovea centralis are un diametru unghiular de aproximativ $1^o$ (sau 0,0175 radiani). Un obiect situat la distanța $|p_1| = 0,25\ m$ are o imagine care se proiectează pe regiunea foveală dacă diametrul său are valoarea de 4,35 mm. La distanța $|p_1| = 1\ m$, încape în ***câmpul vizual optim***, determinat de deschiderea unghiulară a foveei, un disc cu diametrul de 1,74 cm ș.a.m.d.

Obiectele mai mari, proiectate și pe restul petei galbene, se văd în condiții mai puțin bune. Față de același centru optic, deschiderile unghiulare ale petei galbene sunt de $8^o$ - în direcție orizontală și de $6^o$ - în direcție verticală; acest ***câmp vizual mai puțin optim***, cuprinde la $|p_1| = 0,25\,m$, o dimensiune de 3,5 cm în direcție orizontală și de $2,6$ cm în direcție verticală; la $|p_1| = 1\,m$,dimensiunile obiectului din câmp sunt de 14 cm, respectiv 10,4 cm ș.a.m.d.

Acum, putem reveni la problema distanței optime de la care trebuie privit ecranul televizorului. Dacă ne așezăm în așa fel ca imaginea pe retină a ecranului să se încadreze pe pata galbenă, adică astfel încât înălțimea h a ecranului să se vadă sub un unghi de aproximativ $5^o$, lățimea fâșiilor se va vedea sub un unghi de $5^o/625$ linii $\approx 0,5' < (\gamma_1)_{\min}$. Se consideră că aceasta este poziția corectă în fața televizorului. Distanța $|p_1|$ la care trebuie să ne plasăm pentru a îndeplini condiția de mai sus este $|p_1| = 6/0,087 \approx 11,46h$. Când $h = 34\,cm$ (ecran obișnuit) obținem $|p_1| = 3,90\,m$.

Dacă ne punem problema de a vedea neapărat toate detaliile imaginii de pe ecran, chiar cu riscul de a vedea și liniile, este necesar să ne apropiem până pe la mijlocul acestei distanțe, în așa fel încât lățimea unei fâșii să se vadă sub unghiul $(\gamma_1)_{\min}$ . De regulă, se face un compromis individual între cele două distanțe.

Considerăm necesar să mai analizăm aici problema vederii binoculare și, strâns legat de aceasta, problema vederii stereoscopice* lăsând pentru mai târziu problema perceperii culorilor. Precizăm că, privind același obiect cu ambii ochi nu obținem aceeași informație de două ori, ci prin prelucrarea automată, la nivelul creierului, a suprapunerii celor două imagini, dobândim și o anumită cantitate suplimentară de informație.

Menționăm mai întâi că ochii au posibilitatea de a se roti, cu aproximativ $120^o$ în plan vertical (pe direcția nas-frunte) și cu $150^o$ în plan orizontal. Aceasta face ca destul de îngustul câmp vizual să poată fi lărgit prin mobilitatea imaginilor ce provin de la diverse câmpuri vizuale care sunt măturate cu privirea.

Când privim cu ambii ochi spre un același punct obiect, axele vizuale ale celor doi ochi sunt concurente în punctul obiect și, din înclinarea acestora față de direcția "înainte", se poate aprecia distanța obiectului (pe acest principiu se bazează funcționarea telemetrelor). Fie $e$ ***ecartul pupilar,*** adică distanța dintre centralele celor doi ochi; ea variază de la individ la individ, fiind cuprinsă între 54 mm și 72 mm (se adoptă valoarea standard de 65 mm). Dacă un punct obiect se află la distanța $|p_1|$ , se definește ***paralaxa stereoscopică*** $\eta$ prin raportul $\eta = e/|p_1|$ . Fie acum două puncte obiect, situate la distanțele $|p_1'|$ și $|p_1''|$. Diferența lor de paralaxă este evident $\Delta\eta = e(|p_1''|^{-1} - |p_1'|^{-1})$ . Se consideră că diferența de paralaxă este sesizabilă (adică punctele obiect se văd în adâncimea spațiului observat) dacă ea nu este inferioară unei anumite valori minime $(\Delta\eta)_{\min}$ , caracteristică fiecărui individ; aceasta variază între $10''$ și $7''$ , dar, prin antrenament (cum este cazul aviatorilor), poate atinge chiar valori mai mici (de exemplu, $3''$ ). Pentru evaluări uzuale, în cazul unor ochi normali, se adoptă valoarea standard $(\Delta\eta)_{\min} = 10''$ .

Să dăm din nou câteva exemple numerice. Dacă unul din obiecte este la infinit (de exemplu o stea) și considerăm celălalt obiect la distanța corespunzătoare lui $(\Delta\eta)_{\min}$ , din formula diferenței de paralaxă obținem $|p_1''| = e/(\Delta\eta)_{\min} = 65\ mm / 10'' = 1340\ m$ . Să notăm această distanță prin $|p_1|_{\min}$ . Obiectele terestre situate la distanțe ce depășesc valoarea $|p_1|_{\min}$ se văd proiectate pe orizont, raza acestuia fiind de aproximativ 4 km.

Dacă transcriem relația generală exprimând ecartul pupilar sub forma $e = |p_1|_{\min} \cdot (\Delta\eta)_{\min}$ , obținem $(\Delta\eta) = (\Delta\eta)_{\min} |p_1|_{\min} (|p_1''|^{-1} - |p_1'|^{-1})$ și, în situația limită când $(\Delta\eta) = (\Delta\eta)_{\min}$ , avem $|p_1|_{\min}^{-1} = |p_1''|^{-1} - |p_1'|^{-1}$ . Cu ajutorul acestei relații putem calcula distanța $\Delta p_1 = |p_1'| - |p_1''|$ dintre punctul depărtat și cel mai apropiat, care se pot vedea în profunzime. Obținem $\Delta p_1 = |p_1''|^2 / (|p_1|_{\min} - |p_1''|)$ . Când $|p_1''| = 25\,\text{cm}$ (punctum proximum) rezultă $\Delta p_1 \approx 0,05\ mm$ , iar când $|p_1''| = \infty$ avem $\Delta p_1 = \infty$ . Între cele două situații extreme, obținem valori $\Delta p_1$ intermediare. De exemplu, pentru $|p_1''| = 100\,m$, rezultă $\Delta p_1 \approx 8\,m$.

Să analizăm acum în ce fel, vederea binoculară poate genera senzația de relief, adică efectul stereoscopic. Pentru aceasta să studiem situația schițată în fig. 44. Fie $M_s$ și $M_d$ ,

* Capacitatea de a percepe dispunerea obiectelor în spațiu.

două puncte obiect situate în același plan (π), de acomodare, aflat la distanța $|p_1|$ față de ochi. Să considerăm că punctul $M_s$ este observat numai cu ochiul stâng, iar punctul $M_d$ - numai cu ochiul drept. Prelungind axele vizuale, ele se intersectează în punctele M și astfel se crează impresia că s-ar vedea (parcă) un punct obiect unic - M aflat la distanța $|p|$. Din asemănarea triunghiurilor putem scrie $e/|p| = \delta/(|p| - |p_1|)$, adică $|p| = e \cdot |p_1|/(e - \delta)$. Aici $\delta > 0$ când punctul M este mai departe decât planul (π) - situația din partea stângă a figurii - și $\delta < 0$, când punctul M este mai aproape decât planul (π) - situația din partea dreaptă a figurii.

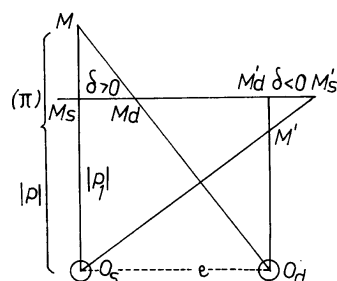


**Fig.44.** Vederea binoculară și obținerea efectului stereoscopic.

Desigur, în situațiile curente, într-un anume plan (π) nu avem numai perechea de puncte $M_s$ și $M_d$ (sau $M_s'$ și $M_d'$ ), ci o mulțime de puncte obiect, perechi, cu diferite valori și semne ale parametrului δ. Punctele aparente $M$ și $M'$ corespunzătoare diverselor perechi de puncte obiect, se vor vedea la distanțe $|p|$ diferite, în fața sau în spatele planului de acomodare (π), în funcție de parametrul δ respectiv. În acest fel, se crează senzația de relief la nivelul creierului.

Prin mărirea artificială a ecartului pupilar e (de pildă prin folosirea telemetrelor sau a altor aparate optice) se poate crește atât distanța $|p_1|_{\min} = 1340\,m$ , numită ***prag al vederii stereoscopice***, cât și efectul stereoscopic propriu-zis.

Cele prezentate până aici se referă numai la ***vederea diurnă***, caracterizată prin valori ale iluminării de minim 100 luxi, în care receptorii optici elementari sunt conurile. Când iluminarea scade sub 100 luxi, conurile devin din ce în ce mai puțin sensibile la excitația luminoasă. Acum încep să devină din ce în ce mai importante bastonașele, însă acestea nu mai sunt sensibile la culoare. Așa cum am mai spus în prima parte a acestei secțiuni, pe retină, numărul bastonașelor este mai mare decât al conurilor, dar, fiind distribuite pe o arie mai întinsă, densitatea lor superficială este relativ mică.

Să schițăm o scurtă analiză a situației în care iluminarea este inferioară valorii de 1/100 luxi, adică a așa-numitei ***vederi crepusculare***.

Între vederea diurnă și cea crepusculară există mai multe diferențe esențiale. Prima dintre acestea este dispariția culorilor, determinată de inhibarea activității conurilor. Apoi, strâns legată de această inhibare, este scăderea acuității vizuale, respectiv diminuarea profunziunii câmpului vizual și, la limită, chiar pierderea senzației de stereoscopie. În vederea crepusculară, pata galbenă și mai ales macula, își pierd calitățile lor relative față de restul retinei. Chiar complementar, acum devin mult mai sensibile părțile periferice ale retinei.

Iluminările mari, necesare funcționării conurilor sunt dăunătoare bastonașelor și, în vederea diurnă, sau la iluminări foarte mari, bastonașele trebuie să fie ferite, protejate. Aceasta se realizează, pe de o parte, prin variația diametrului pupilar, între 8 mm și 2 mm, proces în care suprafața prin care pătrunde în ochi fluxul luminos se micșorează de aproximativ 16 ori. Trebuie să spunem însă că acest mecanism asigură numai o infimă parte din intervalul total de ***adaptare*** care este de ordinul de mărime $10^{12}$ (raportul dintre iluminarea maximă și minimă între care ochiul se poate adapta). Mecanismul fiziologic de bază al adaptării este de natură fizico-chimică și, în esență, constă în următoarele. Lumina incidentă pe o celulă retiniană produce descompunerea parțială a ***purpurei vizuale*** (sau ***rodopsină***) aflate acolo, purpura descompusă iritând nervul vizual. Cu ajutorul energiei obținute prin alimentarea sanguină a

retinei, purpura celulară se reface, stabilindu-se un echilibru dinamic între purpura descompusă și cea nedescompusă. Cu cât lumina este mai puternică, echilibrul se stabilește la o cantitate mai mică de purpură nedescompusă, deci sensibilitatea - proporțională cu aceasta - va fi mai mică. Pe lângă această formă de adaptare, mai intervine și o adaptare determinată de migrarea așa-numitului ***pigment întunecat***. Anume, la iluminări slabe, pigmentul se retrage în domeniile limită dintre celule iar la iluminări puternice el se întinde peste întreaga suprafață a celulei, ferind-o de acțiunile dăunătoare ale luminozităților prea mari.

Deși se spune că adaptarea are loc în mod automat, trebuie să reținem că procesul (reuniune a mai multor tipuri de mecanisme) nu are loc instantaneu. El are o durată de ordinul minutelor (1-3 min) și este asimetric: adaptarea la iluminare mare (adică reducerea sensibilității) se face mai repede decât adaptarea la iluminare mică. Încă un aspect important este acela că, dintre cele trei mecanisme prezentate mai sus, cel mai rapid (aproape instantaneu) este cel al variației diametrului pupilar.

Un efect foarte important, relevant pentru deosebirile care apar la trecerea de la vederea diurnă la cea crepusculară a fost pus în evidență de fiziologul ceh J.E.Purkinje (1825). Fie două suprafețe identice, una roșie și alta albastră, vizibile la fel în condiții diurne, de aceeași luminanță (strălucire). Trecând, prin reducerea luminozității, la condițiile vederii crepusculare, se constată că suprafața albastră se vede cu mult mai bine decât cea roșie. Suprafața albastră va părea a fi albă iar cea roșie - gri închisă.

Analizând acest aspect, pătrundem, iată, în problema perceperii culorilor. Bazele teoretice ale vederii în culori au fost puse în secolul trecut de către Th. Young și apoi de H. Helmoltz. Din păcate, mecanismul vederii culorilor nu este bine cunoscut nici în prezent și el continuă să se preteze la numeroase ipoteze. Cu toate acestea, esența teoriei Young-Helmholtz, fundamentată experimental, se consideră a fi adevărată, căci ea explică de ce în vederea diurnă culorile se pot distinge clar iar în cea crepusculară se pot distinge numai diferențe de luminozitate. Conform acestei teorii, de vederea diurnă sunt răspunzătoare conurile iar de cea crepusculară (nocturnă) - bastonașele. Mai mult, se admite că pe retină există trei tipuri de conuri, cu sensibilități spectrale diferite, care conțin fiecare câte un pigment fotosensibil pentru una din culorile fundamentale - roșu, verde și albastru. Atunci când aceste "particule" fotosensibile sunt stimulate de lumină, se produce senzația culorii respective iar prin amestecul cu ponderi specifice (dependente de sensibilitatea spectrală) a roșului, verdelui și albastrului se obțin toate celelalte culori. Pe această bază, exprimarea oricărei culori prin trei "coordonate" ce indică componența în culori "fundamentale" (triunghiul culorilor lui Maxwell), conform ecuației "Culoare = r (roșu) + g (galben-verzui) + + a (albastru)", pare extrem de firească.

Cercetările din ultima jumătate de secol au confirmat presupunerile teoriei Young-Helmholtz. De exemplu, studiile de absorbție spectrală întreprinse de G. Studnitz în anul 1941 au arătat existența unor maxime de absorbție (respectiv de sensibilitate retiniană) la $\lambda_1 = 470\ nm$ (albastru), $\lambda_2 = 550\ nm$ (verzui-galben) și $\lambda_3 = 650\ nm$ (roșu). Prin medierea celor trei cube de absorbție rezultă că, în vederea diurnă, maximul de sensibilitate este situat la $\lambda_d = 555\ nm$ . Pe de altă parte, maximul de sensibilitate al vederii crepusculare, în care rolul principal îl joacă bastonașele, este situat la

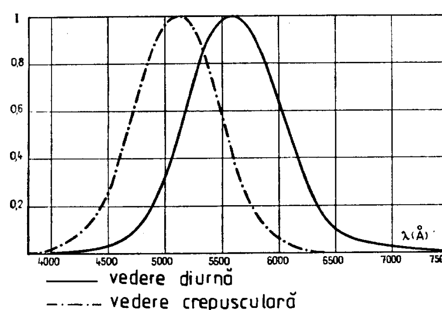


**Fig.45.** Curbele de sensibilitate ale ochiului uman.

$\lambda_c = 510\ nm$ , adică el este deplasat (spre albastru) față de cel al vederii diurne (vezi fig.45). Pe baza acestei constatări efectul Purkinje poate fi înțeles acum ușor.

În prezent, se știe sigur că bastonașele sunt de un singur fel și au sensibilitate cromatică redusă (numai în domeniul $\lambda \leq 625\ nm$ ). Nu se știe însă dacă fiecare con retinian are în structura sa trei receptori cromatici specializați sau dacă exisă trei tipuri de conuri cu curbe de sensibilitate spectrală distincte. După datele experimentale ale lui W.A. Rushton și R.A. Weale (din perioada 1952-1965) rezultă existența pe retină a trei pigmenți vizuali, corespunzând fiecare la o culoare, neamestecați în același con (fiecare con conține câte un singur pigment). Cercetările din anul 1967 ale lui T. Tomita au dus la detectarea a trei grupe de conuri, distribuite cu ponderile de 74%, 10% și 16%, care corespund la excitațiile de 611 nm, 529 nm și respectiv 462 nm. În acest fel, se conturează ideea existenței a trei tipuri de conuri specializate cromatic, în fiecare con aflându-se alt pigment (***eritrolab, clorolab*** și respectiv ***cianolab***).

Deși nu dorim să intrăm în detalii care depășesc cadrul fizic al lucrării noastre, precizăm totuși că există persoane (1% la bărbați și 0,1% la femei) în al căror aparat vizual lipsesc receptorii cromatici de un anumit tip (***dicromazie***). Cel mai tipic exemplu este cel al ***daltonismului*** - lipsa conurilor sensibile pentru roșu (bolnavul nu deosebește culoarea roșie de cea verde). Conurile corespunzătoare celorlalte două culori "de bază" lipsesc mult mai rar. Există de asemenea, deși extrem de rar, persoane la care lipsesc două din cele trei feluri de conuri (***monocromazie***), care nu deosebesc deloc culorile. Lipsa bastonașelor sau insuficiența lor, este cunoscută sub denumirea de ***hemeralopie***. Un astfel de ochi funcționează normal diurn, dar nu se poate adapta la condiții crepusculare.

### *§ 2.4. Lentile sferice*

Cel mai simplu sistem de diopri sferici este lentila sferică, formată din doi dioptri coaxiali cu același mediu interior. În continuare, vom deduce expresiile generale ale matricei de transfer S, respectiv ale elementelor cardinale, pentru o lentilă sferică oarecare $(n_2, r_1, r_2, g)$ imersată în același mediu $(n_1 = n_3)$ . Avem

$$S = R_2 T R_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \dfrac{n_2 - n_3}{r_2} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & \frac{g}{n_2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \dfrac{n_1 - n_2}{r_1} & 1 \end{bmatrix} ,$$

de unde rezultă

$$\begin{cases} S_{11} = 1 + \frac{1-n}{n}\frac{g}{r_1}, \\ S_{22} = 1 + \frac{n-1}{n}\frac{g}{r_2}, \\ S_{12} = \frac{g}{n_1 n}, \\ S_{21} = n_1(1-n)\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} + \frac{n-1}{n}\frac{g}{r_1 r_2}\right), \end{cases} \tag{191}$$

unde prin $n = n_2/n_1 = n_2/n_3$ am notat indicele de refracție relativ al lentilei față de mediul de imersie. Observăm că toate elementele matricei S sunt funcții liniare de grosimea g a lentilei.

Din ecuațiile (188) rezultă aceeași valoare pentru distanța focală obiect și imagine

$$f = f_1 = f_2 = -n_1/S_{21} \quad , \tag{192}$$

respectiv aceeași convergență

$$\frac{1}{f} = (n-1)\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} + \frac{n-1}{n}\frac{g}{r_1 r_2}\right) \quad , \tag{193}$$

expresie cunoscută sub numele de ***formula constructorului de lentile***. Pe montura lentilelor comerciale este imprimată valoarea convergenței acestora în aer $(n_1 = n_3 = 1)$ . În funcție de valoarea indicelui de refracție n, a razelor de curbură $r_1$, $r_2$ și a grosimii g, aceasta poate fi pozitivă (lentile convergente), negativă (lentile divergente) sau nulă (lentile afocale).

Formele Huygens-Gauss și Newton ale relației punctelor conjugate se scriu conform ecuației (182), respectiv ecuației (183), adică

$$\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} = \frac{1}{f}, \quad \zeta_1\zeta_2 = f^2 \quad . \tag{194}$$

Din ecuațiile (188) și (191) rezultă pozițiile punctelor cardinale

$$\begin{cases} t_{f_1} = fS_{22} = f\left(1 + \frac{n-1}{n} \cdot \frac{g}{r_2}\right), \\ t_{f_2} = fS_{11} = f\left(1 + \frac{1-n}{n} \cdot \frac{g}{r_1}\right), \\ t_{p_1} = f(S_{22} - 1) = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{fg}{r_2}, \quad t_{p_1} = t_{n_1} \ , \\ t_{p_2} = f(S_{11} - 1) = \frac{1-n}{n} \cdot \frac{fg}{r_1}, \quad t_{p_2} = t_{n_2}. \end{cases} \tag{195}$$

În general, punctele principale pot fi localizate atât în interiorul, cât și în exteriorul lentilei și nu există o ordine aprioricā a lor. Distanța dintre punctele principale ale lentilei este

$$H_1H_2 = g + t_{p_1} + t_{p_2} = g\left[1 - f\frac{n-1}{n}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)\right] \quad . \tag{196}$$

Un caz particular interesant este cel al ***lentilei afocale*** $(S_{21} = 0)$ . Condiția corespunzătoare rezultă din anularea convergenței, ecuația (193), adică

$$g = \frac{n}{n-1}(r_1 - r_2) \quad . \tag{197}$$

Este ușor de verificat că această condiție este echivalentă cu aceea de coincidență a focarelor interioare ale celor doi dioptri ai lentilei. Mărirea unghiulară a lentilei afocale (imersată în același mediu), conform ecuațiilor (186) și (191), este

$$m_u = S_{22} = 1 + \frac{n-1}{n}\frac{g}{r_2} \quad ,$$

sau, introducând grosimea g dată de condiția (197)

$$m_u = r_1/r_2 \quad . \tag{198}$$

Pentru ilustrare să considerăm exemplul numeric $n = 1,5,\ r_1 = 100\,mm,\ r_2 = -2\,mm$ , astfel că din ecuațiile (197), (198) rezultă $g = 306\,mm$ și respectiv $m_u = -50$ . În acest caz, lentila afocală este de fapt o bară de sticlă cu capete sferice și reprezintă un ***telescop simplu*** cu o importantă mărire unghiulară.

Un caz particular de importanță practică deosebită este ***lentila subțire***. Pentru lentila subțire ideală (doi dioptri complet alipiți) avem $g \approx 0$ astfel că formula constructorului de lentile (193) devine

$$\frac{1}{f} = (n-1)\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) \quad . \tag{199}$$

Conform ecuațiilor (191), matricea de transfer, în acest caz, se scrie sub forma

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -n_1/f & 1 \end{bmatrix} \quad , \tag{200}$$

iar pozițiile punctelor cardinale, ecuațiile (195), sunt date de $t_{f_1} = t_{f_2} = f$ , $t_{p_1} = t_{p_2} = t_{n_1} = t_{n_2} = 0$ . Aceste rezultate se generalizează imediat pentru un ***sistem de lentile subțiri alipite*** (imersat în același mediu), a cărui matrice de transfer este evident

$$S = \prod_{i=1}^{m} S_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -n_1 \sum\limits_{i=1}^{m} \dfrac{1}{f_i} & 1 \end{bmatrix} \quad . \tag{201}$$

Acest sistem este, deci, echivalent cu o singură lentilă subțire de convergență egală cu suma algebrică a convergențelor lentilelor componente, adică

$$\frac{1}{f} = \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{f_i} \quad . \tag{202}$$

O aproximație mai bună a formulelor lentilelor subțiri, în care grosimea g nu mai este complet neglijată, se obține introducând distanța focală f din ecuația (199) în ecuațiile (195), (196). Pentru pozițiile punctelor principale ale unor astfel de lentile subțiri reale ($fg << r_1 r_2$) obținem deci, cu o bună aproximație,

$$\begin{cases} t_{p_1} = \dfrac{g/n}{(r_2/r_1) - 1}, & t_{n_1} = t_{p_1}, \\ t_{p_2} = \dfrac{g/n}{(r_1/r_2) - 1}, & t_{n_2} = t_{p_2}, \\ H_1H_2 = \dfrac{n-1}{n} g, & N_1N_2 = H_1H_2 \,. \end{cases} \tag{203}$$

Punctele principale calculate cu aceste formule pentru câteva tipuri de lentile subțiri de sticlă în aer ($n = 1,5$) sunt ilustrate în fig.46. În aceste cazuri $H_1H_2 = g/3$ (această relație este satisfăcută foarte bine și de lentila relativ groasă prezentată în fig.39).

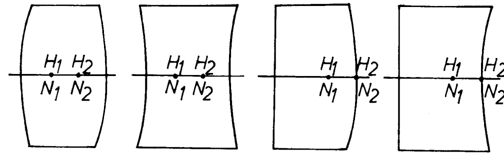



**Fig.46.** Punctele principale și nodale ale unor tipuri de lentile.

Ca aplicație a unei lentile convergente ($f > 0$) să considerăm ***microscopul simplu (lupa)***. În acest caz, obiectul real de investigat ($y_1 > 0, p_1 > 0$) se așează în vecinătatea focarului $F_1$ și anume puțin în dreapta acestuia, astfel că imaginea sa este virtuală, dreaptă și mărită ($y_2 > 0, p_2 < 0$) cum se arată în fig.35. În acest fel ochiul, plasat de obicei în vecinătatea planului focal imagine ($F_2$) vede imaginea sub un unghi $\theta_2$, mai mare decât unghiul $\theta_1$ sub care ar vedea direct obiectul $y_1$ (adică fără intermediul lupei) dacă acesta ar fi așezat în planul imaginii (fig.47). Conform ecuației (184) avem

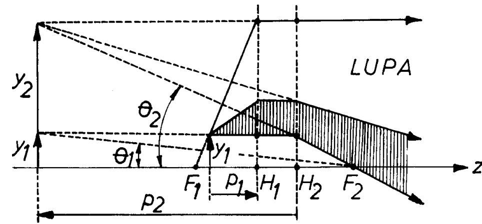



**Fig.47.** Construirea imaginii în lupă.

$$m_t \overset{def}{=} \frac{y_2}{y_1} = 1 - \frac{p_2}{f} = 1 + \frac{|p_2|}{f} > 0 \quad . \tag{204}$$

Cea mai avantajoasă distanță pentru vederea clară a obiectelor sau imaginilor lor este ***distanța minimă de vedere distinctă (punctum proximum)*** de aproximativ $0,25\,m = 1/4\,m$. Prin definiție, ***grosismentul G*** al microscopului (simplu sau compus) este

$$G \overset{def}{=} \frac{\theta_2}{\theta_1} = \left(\frac{y_2}{y_1}\right)_{|p_2|=25\,cm} = 1 + \frac{1}{4f} \qquad \text{, (f în metri).} \tag{205}$$

Întrucât, de regulă $f << 25$ cm, practic avem

$$G \approx 1/4f \quad \text{, (f în metri).} \tag{206}$$

Creșterea grosismentului sistemului se realizează prin micșorarea distanței sale focale. Însă, cu o singură lentilă convergentă nu se poate depăși practic valoarea $G \approx 8$, corespunzătoare valorii $f \approx 3\,cm$, datorită razelor de curbură mici și aberațiilor geometrice și

cromatice corespunzătoare, mari. Aceste aberații pot fi compensate, în mare măsură, în sisteme de lentile convenabil alese. Astfel, un sistem acromat de lentile alipite, cu diafragmă de limitare a fasciculului, poate atinge valori $G \approx 25 \;\; (f \approx 1\, cm)$. Aberațiile pot fi diminuate de asemenea folosind ca lupă un dublet de lentile subțiri separate de o distanță egală cu jumătate din suma distanțelor lor focale, cum sunt sistemele ocular de tip Ramsden sau de tip Huygens. De regulă, acestea sunt încorporate în sisteme optice mai complexe (microscoape, telescoape), unde servesc pentru examinarea imaginii furnizate de către obiectiv. Cum vom arăta în secțiunea următoare, cu ajutorul unor astfel de instrumente compuse, se pot obține grosismente de ordinul $G \approx 10^2 \div 10^3$ .

## *§ 2. 5. Sisteme compuse*

În general, pentru a mări grosismentul și a ameliora calitatea imaginilor, cel mai adesea se asociază două sau mai multe lentile. Astfel de sisteme compuse sunt ***obiectivele***, care formează imagini reale, și ***ocularele***, care formează imagini virtuale. La rândul lor, ***microscopul*** (destinat observării micilor obiecte apropiate) și ***telescopul*** (destinat observării obiectelor îndepărtate) sunt compuse dintr-un obiectiv, care formează imaginea intermediară, și un ocular, utilizat ca lupă, care formează imaginea finală virtuală.

### *A. Dubletul de lentile subțiri*

Să considerăm mai întâi cel mai simplu sistem compus, și anume ***sistemul dublet, format din două lentile subțiri***, de convergențe $1/f_1, 1/f_2$ , separate de distanța (***grosimea dubletului***)

$$d = f_1 + f_2 + l \tag{207}$$

și imersate în același mediu de indice de refracție $n$ (fig.48). Mărimea $l$, denumită ***interval optic***, reprezintă distanța dintre focarele interioare ale dubletului. În fig.48 se arată construcția imaginii cu ajutorul razelor principale care trec prin focarele lentilelor componente. Prima lentilă, $L_1$ , poartă numele de ***lentilă de câmp***, sau ***lentilă colectoare*** iar a doua lentilă, $L_2$ , de ***lentilă de ochi***. Datorită aplicației sale principale, dubletul de lentile subțiri este sinonim cu ***ocularul***. Acestea se clasifică în dublete (oculare) pozitive, sau negative, după cum focarul obiect $F_1$ al sistemului este real (adică anterior lui $L_1$ ) sau, respectiv, virtual (adică după $L_1$ ). Evident, numai ocularul pozitiv poate fi utilizat ca lupă pentru observarea obiectelor reale și, respectiv, numai ocularul negativ pentru observarea obiectelor virtuale. Se obișnuiește ca orice dublet să fie caracterizat prin ***simbolul*** său, reprezentat de trei numere algebrice $p, q, r$ , astfel că

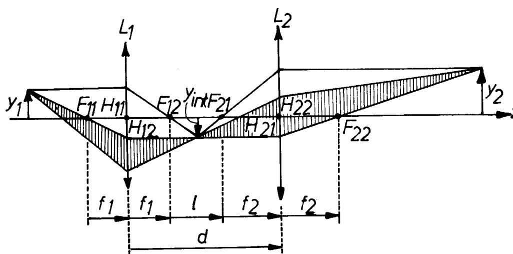


**Fig.48.** Sistemul dublet cu lentile subțiri.

$$\frac{f_1}{p} = \frac{d}{q} = \frac{f_2}{r} = const. \ , \qquad (208)$$

unde constanta, din motive tehnice, nu poate fi mai mică decât câțiva milimetri. Câteva dublete, folosite în practică, sunt date în tabelul următor:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Ramsden: | 1, | 1, | 1, | pozitiv |
| Ramsden modificat: | 3, | 2, | 3, | pozitiv |
| Huygens: | 4, | 3, | 2, | negativ |
| Dollond-Huygens: | 3, | 2, | 1, | negativ |
| Wollaston: | 2, | 3, | 6, | pozitiv |

În continuare, vom deduce pe cale analitică formulele dubletului de lentile subțiri. Astfel, matricea de transfer a sistemului este

$$S = S_2 T S_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -n/f_2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & d/n \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -n/f_1 & 1 \end{bmatrix}$$

și are elementele

$$\begin{cases} S_{11} = 1 - d/f_1, \\ S_{22} = 1 - d/f_2, \\ S_{12} = d/n, \\ S_{21} = -n\left(\dfrac{1}{f_1} + \dfrac{1}{f_2} - \dfrac{d}{f_1 f_2}\right). \end{cases} \qquad (209)$$

Observăm că toate elementele matricei S sunt funcții liniare de distanța d dintre lentile, permițând astfel o ajustare convenabilă a elementelor cardinale în funcție de aplicația dorită. Din ecuațiile (188) și (209) obținem expresia convergenței dubletului

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \frac{d}{f_1 f_2} = -\frac{l}{f_1 f_2} \ , \qquad (210)$$

denumită și ***formula lui Gullstrand***, precum și poziția punctelor cardinale

$$t_{p_1} = -fd/f_2, \quad t_{p_2} = -fd/f_1 \quad , \qquad (211)$$

$$t_{f_1} = f[1 - d/f_2] = f + t_{p_1}, \ \ t_{f_2} = f[1 - d/f_1] = f + tp_2 \quad . \qquad (212)$$

Mediile de imersie extreme fiind aceleași, avem și $t_{n_1} = t_{p_1}, \ t_{n_2} = t_{p_2}$ . Am stabilit, astfel, toate elementele cardinale ale dubletului de lentile subțiri, și anume, distanța focală f, ecuația (210), punctele principale $H_1, H_2$ prin $t_{p_1} = H_1 H_{11}, \ t_{p_2} = H_{22} H_2,$ ecuația (211), și punctele focale $F_1, F_2$ prin $t_{f_1} = F_1 H_{11}, \ \ t_{f_2} = H_{22} F_2,$ ecuația (212). Mai putem determina poziția punctelor focale și din

$$\begin{cases} F_1F_{11} \equiv t_{f_1} - f_1 = f_1^2/l \ , \\ F_{22}F_2 \equiv t_{f_2} - f_2 = f_2^2/l \ . \end{cases} \tag{213}$$

Ultimele relații nu exprimă altceva decât chiar formula lui Newton, adică ecuația (183), dintre perechile de puncte conjugate $F_1, F_{21}$ față de $L_1$, respectiv $F_{12}, F_2$ față de $L_2$.

Cele mai simple oculare, folosite la microscoape și telescoape, sunt ***ocularul Huygens*** și ***ocularul Ramsden***, prezentate în fig.49. Elementele cardinale au fost calculate din ecuațiile (210) - (212) iar construcția imaginilor a fost realizată cu ajutorul razelor principale care trec prin focarele lentilelor componente. În ambele cazuri am presupus că ochiul, situat convenabil în spatele ocularului, privește relaxat imaginea finală (virtuală și situată la infinit), fapt ce implică localizarea imaginii furnizate de un sistem obiectiv (nearătat în figură) chiar în planul focal obiect $F_1$ al sistemului ocular. Dar, cum am văzut, punctele $F_1$ și $F_{21}$ sunt conjugate față de lentila de câmp $L_1$. Imaginea din $F_1$ reprezintă un obiect (virtual pentru ocularul Huygens și real pentru ocularul Ramsden) a cărui imagine (reală pentru ocularul Huygens și virtuală pentru ocularul Ramsden) este formată de lentila de câmp $L_1$ în planul focal obiect $F_{21}$ al lentilei de ochi $L_2$. Evident, imaginea finală furnizată de lentila $L_2$ (deci de întregul ocular) este virtuală și localizată la infinit. Ca și în cazul lupei, această imagine poate fi adusă până la distanța minimă de vedere distinctă ($\approx 25\,cm$) prin deplasarea corespunzătoare a ocularului.

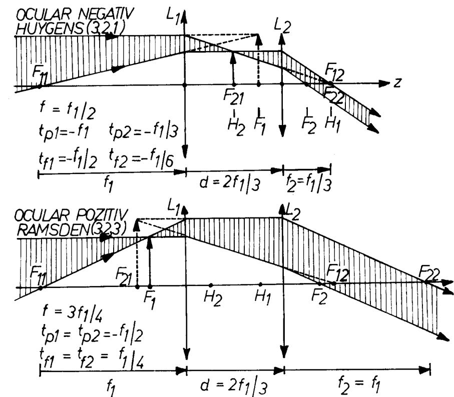


**Fig.49.** Ocularul Huygens (negativ) și ocularul Ramsden (pozitiv).

Cum vom arăta într-o altă secțiune (anume în §2.7), condiția de acromatizare a convergenței unui dublet de lentile subțiri, confecționate din aceeași sticlă, este

$$d = \frac{f_1 + f_2}{2} \ . \tag{214}$$

Se vede imediat că ocularele de tip Huygens (4,3,2,) și (3,2,1) satisfac această condiție. În plus, ocularul (3,2,1) mai are proprietatea că o rază incidentă paralelă cu axul optic principal suferă refracții de același unghi pe cele două lentile.* Această repartizare echilibrată a refracțiilor conduce la diminuarea aberațiilor de sfericitate. Mai observăm că și ocularul Ramsden (1, 1, 1) satisface ecuația (214). Însă, în acest caz, $d = f_2$ astfel că, din nefericire, planul focal $F_{21}$ și imaginea corespunzătoare sunt localizate chiar pe lentila de câmp $L_1$. Din această cauză, prin ocular se observă bine și orice impuritate sau defect de pe suprafețele acestei lentile (praf, pete, zgârieturi). Pentru a evita acest inconvenient cele două lentile ale dubletului se apropie puțin una de alta, până la $d = 2f_2/3$ menținând în continuare $f_1 = f_2$. Rezultă astfel ***ocularul Ramsden modificat*** (3, 2, 3), prezentat în fig.49, care nu mai îndeplinește strict condiția de acromatizare (214). Aberațiile cromatice, relativ slabe, ale

* Condiția pentru aceasta, în aproximația paraxială, este $f_1 - f_2 = d$ care, împreună cu $f_1 + f_2 = 2d$, ecuația (214), conduce la ocularul (3,2,1).

acestui ocular sunt compensate în ***ocularul Kellner*** (3, 2, 3), la care singura modificare constă în înlocuirea lentilei de ochi cu un dublet de contact acromat realizat prin alipirea unei lentile convergente de sticlă crown de o lentilă divergentă de sticlă flint (vezi paragraful 2.7). Ocularele de tip Ramsden au avantajul că permit montarea unui ***micrometru ocular*** în planul focal $F_1$ pentru măsurarea dimensiunilor imaginii reale formată de sistemul obiectiv.

În general, în practică, pentru asigurarea aplanetismului (vezi fig.24) și corectarea aberațiilor geometrice și cromatice supărătoare pentru aplicația dorită, obiectivele și ocularele sistemelor optice de mare performanță sunt ele însele sisteme compuse destul de complicate, cum se arată în fig.50 pentru un ***ocular Erfle*** cu $f = 25,4\,mm$ (Hopkins, 1962) și în fig.51 pentru un obiectiv de microscop cu apertura numerică $n_1 \sin\gamma_1 = 0,85$ și $f = 4,19\,mm$ (Ruben, 1964). Nu este în intenția noastră să introducem cititorul în complicațiile subtile ale proiectării sistemelor dioptrice moderne ci mai degrabă să îl familiarizăm cu evaluarea, folosirea și adaptarea sistemelor deja răspândite în practica curentă.

| Nr. | n | V* | r (mm) | g (mm) |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 1,0 | | ∞ | 5,5 |
| 2 | 1,638 | 55,5 | -32,26 | 1,8 |
| 3 | 1,649 | 33,8 | +36,36 | 11,5 |
| 4 | 1,638 | 55,5 | -36,36 | 0,5 |
| 5 | 1,0 | | +81,30 | 8,0 |
| 6 | 1,638 | 55,5 | -76,92 | 0,5 |
| 7 | 1,0 | | +42,74 | 12,0 |
| 8 | 1,638 | 55,5 | -42,74 | 5,4 |
| 9 | 1,720 | 29,3 | +62,89 | |
| 10 | 1,0 | | | |

* V este ***numărul lui Abbe*** (vezi paragraful 2.7)

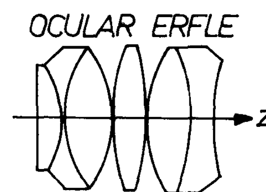



**Fig.50.** Ocularul Erfle.

| Nr. | n | V | r (mm) | g (mm) |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 1,0 | | -1,9055 | 3,39 |
| 2 | 1,620 | 60,3 | -2,8576 | 0,10 |
| 3 | 1,0 | | -24,2100 | 1,60 |
| 4 | 1,620 | 60,3 | -5,4450 | 0,10 |
| 5 | 1,0 | | ∞ | 1,80 |
| 6 | 1,611 | 58,8 | -10,1860 | 0,10 |
| 7 | 1,0 | | ∞ | 1,40 |
| 8 | 1,620 | 60,3 | -7,0469 | 0,70 |
| 9 | 1,751 | 27,8 | +7,0469 | 0,06 |
| 10 | 1,0 | | +7,4473 | 1,80 |
| 11 | 1,517 | 64,5 | +100,0000 | 0,44 |
| 12 | 1,0 | | -22,9090 | 3,60 |
| 13 | 1,617 | 54,9 | -13,1830 | 4,70 |
| 14 | 1,0 | | -36,9830 | 3,90 |
| 15 | 1,720 | 36,2 | -18,0300 | 9,00 |
| 16 | 1,0 | | +7,5858 | 3,67 |
| 17 | 1,617 | 54,9 | +5,5463 | |
| 18 | 1,0 | | | |

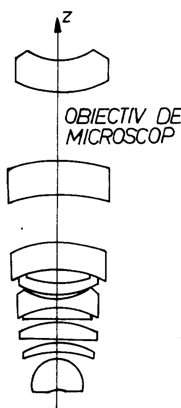



**Fig.51.** Obiectiv de microscop.

## B. Dubletul de sisteme optice coaxiale

Până acum am învățat să calculăm matricea de transfer S a oricărui sistem optic centrat, și cu ajutorul ecuațiilor (188), să determinăm elementele cardinale ale acestuia. Cu aceasta am obținut schema optică echivalentă cu ajutorul căreia putem construi grafic imaginile. În continuare, pentru a înțelege mai bine funcționarea microscoapelor și telescoapelor este necesar să generalizăm formulele dubletului de lentile subțiri, ecuațiile (210) - (213), pentru un ***dublet de sisteme optice coaxiale oarecare***. Astfel, fie sistemul $S$ (vezi fig.52) format din două subsisteme $S_1$ și $S_2$, date prin matricele lor de transfer, respectiv, conform ecuațiilor (188), prin elementele lor cardinale și anume

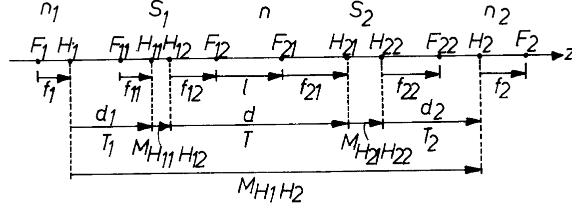


**Fig.52.** Elementele cardinale ale unui dublet de sisteme coaxiale.

$$S_1 : F_{11}, F_{12}, H_{11}, H_{12}; f_{11}, f_{12},$$

$$S_2 : F_{21}, F_{22}, H_{21}, H_{22}; f_{21}, f_{22}.$$

Vom nota cu $l$ intervalul optic, adică distanța $F_{12}F_{21}$ dintre focarele interioare ale dubletului, respectiv cu

$$d = f_{12} + f_{21} + l \quad , \tag{215}$$

grosimea dubletului, adică distanța $H_{12}H_{21}$ dintre punctele principale interioare ale acestuia. Pentru generalitate, vom considera mediile de imersie diferite, și anume mediile extreme $n_1, n_2$ și mediul interior n. Problema constă în a determina, în funcție de aceste date, elementele cardinale ale sistemului compus, adică

$$S : F_1, F_2, H_1, H_2; f_1, f_2.$$

Metoda matriceală permite o analiză elegantă a sistemelor optice centrate compuse din mai multe subsisteme. Astfel ținând cont de avantajul formei simple a matricei de transfer dintre planele principale, ecuația (176), în cazul dubletului de sisteme considerat aici avem

$$M_{H_1H_2} = T_2 M_{H_{21}H_{22}} T M_{H_{11}H_{12}} T_1 =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & d_2/n_2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ S_{21}^{(2)} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & d/n \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ S_{21}^{(1)} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & d_1/n_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ S_{21} & 1 \end{bmatrix} \quad .$$

După efectuarea produsului de matrice și identificare avem

$$S_{21} = S_{21}^{(1)} + S_{21}^{(2)} + S_{21}^{(1)} S_{21}^{(2)} \cdot \frac{d}{n}, \tag{216}$$

$$\frac{d_1}{n_1} = -\frac{S_{21}^{(2)}}{S_{21}} \cdot \frac{d}{n}, \quad \frac{d_2}{n_2} = -\frac{S_{21}^{(1)}}{S_{21}} \cdot \frac{d}{n}. \qquad (217)$$

În continuare, vom înlocui elementele 21 prin distanțele focale corespunzătoare, conform definiției lor generale, ecuațiile (188), adică

$$\begin{cases} f_1 = -n_1/S_{21}, & f_{11} = -n_1/S_{21}^{(1)}, & f_{21} = n/S_{21}^{(2)} \\ f_2 = -n_2/S_{21}, & f_{12} = -n/S_{21}^{(1)}, & f_{22} = -n_2/S_{21}^{(2)} \end{cases} . \qquad (218)$$

De aici avem, evident, și relațiile

$$\frac{f_1}{f_2} = \frac{n_1}{n_2}, \qquad \frac{f_{11}}{f_{12}} = \frac{n_1}{n}, \qquad \frac{f_{21}}{f_{22}} = \frac{n}{n_2} \quad . \qquad (219)$$

Din ecuația (216) obținem astfel ***generalizarea formulei lui Gullstrand***, ecuația (210), adică

$$\begin{cases} \dfrac{1}{n_2 f_1} \equiv \dfrac{1}{n_1 f_2} = \dfrac{1}{n_2 f_{11}} + \dfrac{1}{n_1 f_{22}} - \dfrac{d}{n f_{11} f_{22}} = -\dfrac{l}{n f_{11} f_{22}}, \\ \dfrac{1}{f_1} = -\dfrac{l}{f_{11} f_{21}}, \qquad \dfrac{1}{f_2} = -\dfrac{l}{f_{12} f_{22}}, \end{cases} \qquad (220)$$

relații care permit determinarea distanțelor focale $f_1, f_2$ . Mai departe, din ecuația (217) rezultă generalizarea ecuațiilor (211), (212), adică

$$d_1 = -f_1 d/f_{21}, \quad d_2 = -f_2 d/f_{12} \quad , \qquad (221)$$

relații care permit determinarea punctelor principale $H_1, H_2$ din $H_1 H_{11} = d_1,\ H_{22} H_2 = d_2$ , respectiv a punctelor focale $F_1,\ F_2$ din $F_1 H_1 = f_1,\ H_2 F_2 = f_2$ . Mai putem determina poziția punctelor focale și din

$$\begin{cases} F_1 F_{11} = f_1 + d_1 - f_{11} = \dfrac{f_{11} f_{12}}{l}, \\ F_{22} F_2 = f_2 + d_2 - f_{22} = \dfrac{f_{21} f_{22}}{l}, \end{cases} \qquad (222)$$

relații care generalizează ecuațiile (213).

Mai sus am determinat pe cale analitică elementele cardinale ale dubletului de sisteme. Într-un alt mod, acestea pot fi stabilite și grafic cu ajutorul razelor principale care trec prin focare, așa cum se arată în fig.53. Astfel, razele principale de tipul $IJF_{12}KLF_2M$, care se propagă de la stânga spre dreapta, determină punctele cardinale $F_2, H_2$. În mod similar, razele principale de tipul $MNF_{21}OPF_1I$, care se propagă de la dreapta spre stânga, determină punctele cardinale $F_1, H_1$ . Formulele dubletului de sisteme rezultă direct din

geometria figurii 53. Astfel, din asemănarea triunghiurilor hașurate în același fel, avem rapoartele

$$-f_1/f_{11} = f_{21}/l, \qquad -f_2/f_{22} = f_{12}/l, \tag{223}$$

$$-f_1/d_1 = f_{21}/d, \qquad -f_2/d_2 = f_{12}/d, \tag{224}$$

$$F_1F_{11}/f_{11} = f_{12}/l, \qquad F_{22}F_2/f_{22} = f_{21}/l, \tag{225}$$

care exprimă, respectiv, ecuațiile (220), (221), (222). Remarcăm că relațiile (222), (225) reprezintă formula lui Newton, adică ecuația (183), dintre perechi de puncte conjugate, și anume perechea $F_1, F_{21}$ față de sistemul $S_1$, respectiv perechea $F_{12}, F_2$ față de sistemul $S_2$. Evident, construcțiile geometrice prezintă avantajul că sunt intuitive.

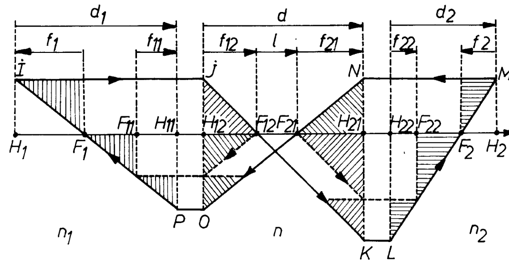



**Fig.53.** Construirea imaginii într-un sistem dublet și determinarea elementelor cardinale ale sistemului global.

În cazul particular, cel mai des întâlnit în practică, în care sistemele $S_1$, $S_2$ sunt imersate în același mediu $(n_1 = n = n_2)$ vom simplifica notația (sperăm fără risc de confuzie) prin înlocuirile

$$f_1 = f_2 \rightarrow f,$$

$$f_{11} = f_{12} \rightarrow f_1,$$

$$f_{21} = f_{22} \rightarrow f_2,$$

astfel că ecuațiile (220), (221), (222) devin respectiv

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \frac{d}{f_1 f_2} = -\frac{l}{f_1 f_2}, \tag{226}$$

$$d_1 = -fd/f_2, \quad d_2 = -fd/f_1, \tag{227}$$

$$F_1F_{11} = f_1^2/l, \quad F_{22}F_2 = f_2^2/l. \tag{228}$$

Este remarcabil faptul că ecuațiile (226) - (228) ale dubletului de sisteme coaxiale oarecare generalizează în aceeași formă ecuațiile dubletului de lentile subțiri, adică ecuațiile (210) - (213).

## *C. Sisteme focale și sisteme afocale (telescopice)*

Să aplicăm teoria elaborată mai sus la analiza unor sisteme de interes practic. Vom considera, mai întâi, clasa de ***sisteme focale*** $(S_{21} \neq 0)$, destinate să formeze imagini reale

sau virtuale cu o mărire liniară transversală cât mai mare. În continuare, vom presupune că mediile extreme sunt identice astfel că ecuația (184) se scrie

$$m_t = \frac{f}{f-p_1} = \frac{f-p_2}{f} \quad . \qquad (229)$$

Să considerăm mai întâi ***obiectivul fotografic***. Acesta este un sistem optic convergent $(f > 0)$ compus dintr-un număr oarecare de lentile cum este, de exemplu, obiectivul Tessar (fig.29,b) destinat să formeze imagini reale ale obiectelor exterioare. Cel mai adesea obiectele fotografice sunt suficient de îndepărtate astfel că $p_1 >> f > 0$ și din ecuația (229) rezultă

$$m_t \approx -f/p_1 < 0, \quad |m_t| << 1 \quad . \qquad (230)$$

Imaginea este răsturnată, iar mărirea $m_t$ este proporțională cu distanța focală $f$ a obiectivului. Dacă detaliile imaginii sunt prea mici, ele nu mai pot fi recunoscute datorită structurii granulare a materialului fotografic. Din acest motiv, trebuie folosite obiective cu distanță focală mare. Aceasta, însă, implică lungirea camerei fotografice deoarece imaginea se formează practic în planul focal imagine $F_2$.

O creștere substanțială a distanței focale, pentru fotografierea detaliilor obiectelor îndepărtate, menținând o lungime relativ mică a camerei fotografice, se realizează cu ajutorul dubletului ***teleobiectiv***, format din sistemul convergent $S_1 (f_1 > 0)$ și sistemul divergent $S_2 \ (f_2 < 0)$ . Folosind ecuația (226), expresia măririi (230) devine

$$m_t \approx f_1 f_2 / l p_1 < 0, \qquad (231)$$

unde $f_1, l, p_1 > 0$ și $f_2 < 0$ . Rezultă astfel condiția $l = d - f_1 + |f_2| > 0$ adică $|f_2| > f_1 - d > 0$ , care trebuie satisfăcută pentru valori $f = f_1 |f_2| / l$ cât mai mari. Să ilustrăm această discuție cu exemplul numeric $f_1 = 20\,cm,\ f_2 = -10\,cm,\ d = 15\,cm$ , de unde, cu ajutorul ecuațiilor (226), (227), obținem $f = 40\,cm,\ d_1 = 60\,cm,\ d_2 = -30\,cm$ (fig. 54). Observăm că, deși distanța focală a sistemului este mare, lungimea camerei fotografice, egală cu $|f_2|$ , rămâne mică (deoarece punctele cardinale ale teleobiectivului sunt deplasate mult în față). În practică, cele două componente $S_1, S_2$ sunt dublete acromate (vezi paragraful 2.7).

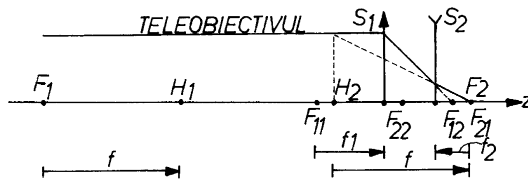



**Fig.54.**Schema simplificată a unui teleobiectiv.

Să considerăm în continuare ***microscopul compus***, care constă dintr-un obiectiv convergent $(f_1 > 0)$ care formează o imagine intermediară inversată $y_{int}$ , și un ocular convergent $(f_2 > 0)$ cu rol de lupă, care formează imaginea finală virtuală. Principiul este demonstrat în fig.55 unde, pentru ilustrare, am luat (în unități arbitrare) $f_1 = 17, f_2 = 20,\ l = 53$, deci $d = f_1 + f_2 + l = 90$; de aici, prin calcul, cu ecuațiile (226), (227), sau construcție grafică, avem $f \approx -6,5,\ d_1 \approx 29,\ d_2 \approx 34.$ De exemplu, pentru

$p_1 = 22$ rezultă $p_2 = -120$ și $m_t \approx -19$. Remarcăm că, pentru a asigura o apertură numerică $n_1 \sin\gamma_1$ cât mai mare, obiectele trebuie să fie foarte apropiate de primul plan focal $(F_{11})$ al obiectivului, practic localizate în primul plan focal $(F_1)$ al sistemului.

În general, conform ecuațiilor (226), (229), avem

$$m_t = 1 - \frac{p_2}{f} = 1 + \frac{|p_2|}{f} = 1 - \frac{l\,|p_2|}{f_1 f_2} \approx -\frac{l\,|p_2|}{f_1 f_2} < 0, \qquad (232)$$

unde semnul minus înseamnă că imaginea finală este inversată. Aproximația făcută la ecuația (232) este foarte bună întrucât ne interesează numai cazul $p_2/f = l\,|p_2|/f_1 f_2 >> 1$. Mai departe, din ecuațiile (205), (206) rezultă ***grosismentul***

$$G \approx \frac{1}{4f} = -\frac{l}{4 f_1 f_2}, \quad (l, f, f_1, f_2 \text{ în metri}). \qquad (233)$$

În comparație cu grosismentul lupei simple, formată dintr-o singură lentilă, ***grosismentul microscopului compus*** poate fi crescut cu câteva ordine de mărime, atât prin micșorarea distanțelor focale ale obiectivului și ocularului cât, mai ales, prin creșterea corespunzătoare a distanței dintre focarele interioare (valorile standard pentru multe microscoape sunt $l = 150 \div 160\,mm$). Astfel, de exemplu, un grosisment mediu $G \approx -160$ se realizează cu $f_1 = f_2 = 16\,mm$ și $l = 160\,mm$ $(d = f_1 + f_2 + l = 192\,mm)$; în acest caz, din ecuațiile (226), (227) avem $f = 1,6\,mm$ și $d_1 = d_2 = 19,2\,mm$. Combinații între diverse obiective și oculare conduc în practică la valori în intervalul $|G| \approx 25 \div 3000$. În principiu, grosismentul $|G| = l/4f_1 f_2$, ecuația (233), poate fi oricât de mare. ***Grosismentul util*** este însă limitat de puterea de rezoluție a obiectivului și a ochiului observatorului. Astfel, ținând cont că $\theta_2 = G\theta_1 \geq (\gamma_1)_{\min}^{ochi}$, din ecuațiile (123) și (189) rezultă ***grosismentul util maxim***

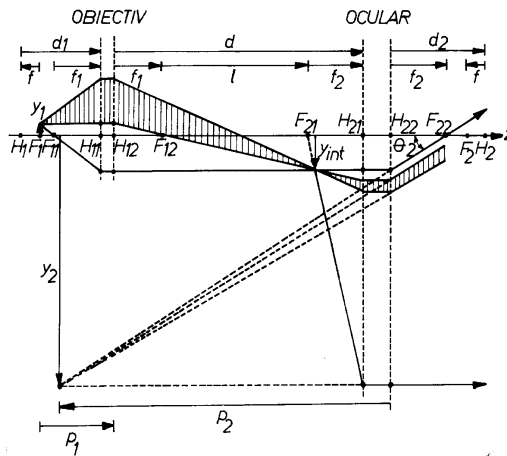



**Fig.55.** Formarea imaginii în microscopul compus și elementele sale cardinale.

$$|G| = \frac{|p_2|(\gamma_1)_{\min}^{ochi}}{(\delta r_1)_{\min}} = \frac{|p_2|(\gamma_1)_{\min}^{ochi}}{0,61\lambda_0} n_1 \sin\gamma_1.$$

Luând $(\gamma_1)_{\min}^{ochi} \approx 1' \approx (1/3400)rad$, $\lambda_0 \approx 500\,nm = 5 \cdot 10^{-5}\,cm$ și $|p_2| = 25\,cm$ avem $|G| \approx 250 n_1 \sin\gamma_1$, adică $|G| \approx 250$ pentru obiectiv sec $(n_1 \sin\gamma_1 \approx 1)$ și $|G| \approx 375$ pentru obiectiv cu imersie $(n_1 \sin\gamma_1 \approx 1,5)$ . Pentru a evita obosirea ochiului prin forțare la limita propriei puteri separatoare $(\approx 1')$ se recomandă folosirea unui grosisment de circa patru

ori mai mare decât aceste valori, de unde rezultă ***regula utilă*** $|G| = 1000 \div 1500$. Dacă excesul de grosisment este prea mare, apare dezavantajul că observăm figurile difuze de difracție (discurile Airy) asociate punctelor obiect luminoase , fără alte detalii.

Spre deosebire de sistemele focale ($S_{21} \neq 0$) discutate mai sus, ***sistemele afocale sau telescopice*** ($S_{21} = 0$) au distanțele focale infinite și punctele cardinale la infinit (conform ecuațiilor (188)). Cum am arătat în paragraful 2.3, aceste sisteme au proprietatea generală că transformă orice fascicul paralel tot într-un fascicul paralel (fig. 32) cu mărirea unghiulară

$$m_u = n_1 S_{22}/n_2 = n_1/n_2 S_{11}, \qquad (234)$$

aceeași pentru toate razele conjugate, deoarece $m_u$ este o constantă a sistemului. Conform condițiilor de stigmatism Abbe și Herschel (ecuațiile (98) și (102)) în aproximația paraxială avem de asemenea

$$m_t = n_1/n_2 m_u = S_{11} = 1/S_{22}, \qquad (235)$$

$$m_a = n_1/n_2 m_u^2 = n_2 S_{11}^2/n_1 = n_2/n_1 S_{22}^2, \qquad (236)$$

unde am ținut cont că, pentru sisteme afocale, $\det S = S_{11}S_{22} = 1$. Rezultă astfel că și măririle liniare transversală și axială sunt constante ale sistemului, adică sunt independente de poziția obiectului. Acest rezultat apare evident prin construcție geometrică, așa cum este ilustrat în fig.56 pentru mărirea $m_t$ cu ajutorul unei perechi de raze conjugate paralele cu axul optic.

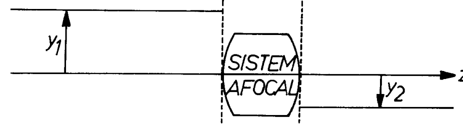



**Fig.56.** Sistem afocal (telescopic) simplu.

Expresiile măririlor liniare (235), (236) pot fi deduse și prin metoda matriceală. Astfel, ținând cont de condiția de definiție $S_{21} = 0$ a sistemelor afocale și de expresiile (234) ale măririi unghiulare, elementele (156) - (159) ale matricei de transfer între două plane de referință oarecare devin

$$\begin{cases} M_{11} = S_{11} = n_1/n_2 m_u, \\ M_{22} = S_{22} = n_2 m_u/n_1, \\ M_{21} = S_{21} = 0, \\ M_{12} = \dfrac{S_{11}}{n_1}t_1 + \dfrac{S_{22}}{n_2}t_2 + S_{12} = \dfrac{1}{n_2 m_u}t_1 + \dfrac{m_u}{n_1}t_2 + S_{12}, \end{cases} \qquad (237)$$

astfel că relația planelor conjugate $M_{12} = 0$ se mai scrie

$$t_2 = -\frac{n_1 t_1}{n_2 m_u^2} - \frac{n_1 S_{12}}{m_u}. \qquad (238)$$

Matricea de transfer între plane conjugate ale sistemelor afocale are astfel două forme echivalente, date de ecuația (173), respectiv de ecuațiile (237), adică

$$M_{P_1P_2} = \begin{bmatrix} m_t & 0 \\ 0 & m_t^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_1/n_2 m_u & 0 \\ 0 & n_2 m_u/n_1 \end{bmatrix} \qquad (239)$$

de unde, prin identificare, rezultă ecuația (235). De asemenea, conform definiției $m_a \overset{def}{=} -dt_2/dt_1$, prin derivarea ecuației (238) obținem ecuația (236).

Să considerăm în continuare ***dubletul afocal*** de sisteme coaxiale (fig.57). În acest caz, formula lui Gullstrand (220) pentru sisteme afocale ($S_{21} = 0$ , adică $1/f_1 = 1/f_2 = 0$ ) devine

$$\frac{n}{n_1}f_{11} + \frac{n}{n_2}f_{22} = d,$$

sau, ținând cont că $f_{11}/f_{12} = n_1/n,\ f_{21}/f_{22} = n/n_2$ , ecuația (219),

$$f_{12} + f_{21} = d,$$

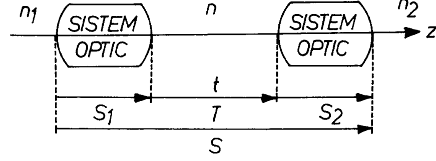



**Fig.57.** Dublet afocal de sisteme coaxiale.

condiție echivalentă cu aceea de coincidență a focarelor interioare $F_{12}$ și $F_{21}$ .

Pentru calculul măririlor este necesar să determinăm elementele diagonale $S_{11}$, $S_{22}$ și să impunem condiția $S_{21} = 0$. Vom proceda mai întâi la înmulțirea matricelor conform fig.57 și anume

$$S = S_2TS_1 = \begin{bmatrix} S_{11}^{(2)} & S_{12}^{(2)} \\ S_{21}^{(2)} & S_{22}^{(2)} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & t/n \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} S_{11}^{(1)} & S_{12}^{(1)} \\ S_{21}^{(1)} & S_{22}^{(1)} \end{bmatrix}, \tag{240}$$

unde știm că

$$\begin{cases} \det S_1 = S_{11}^{(1)}S_{22}^{(1)} - S_{12}^{(1)}S_{21}^{(1)} = 1, \\ \det S_2 = S_{11}^{(2)}S_{22}^{(2)} - S_{12}^{(2)}S_{21}^{(2)} = 1. \end{cases} \tag{241}$$

Obținem astfel generalizarea ecuațiilor (209) în forma

$$\begin{cases} S_{11} = S_{11}^{(1)}S_{11}^{(2)} + S_{21}^{(1)}S_{12}^{(2)} + (t/n)S_{21}^{(1)}S_{11}^{(2)}, \\ S_{22} = S_{22}^{(1)}S_{22}^{(2)} + S_{12}^{(1)}S_{21}^{(2)} + (t/n)S_{22}^{(1)}S_{21}^{(2)}, \\ S_{12} = S_{12}^{(1)}S_{11}^{(2)} + S_{22}^{(1)}S_{12}^{(2)} + (t/n)S_{22}^{(1)}S_{11}^{(2)}, \\ S_{21} = S_{11}^{(1)}S_{21}^{(2)} + S_{21}^{(1)}S_{22}^{(2)} + (t/n)S_{21}^{(1)}S_{21}^{(2)}, \end{cases} \tag{242}$$

unde toate elementele sistemului compus sunt funcții liniare de distanța redusă t/n dintre sistemele componente. Condiția $S_{21} = 0$ ca sistemul compus să fie afocal se realizează pentru

$$\frac{t}{n} = -\frac{S_{11}^{(1)}S_{21}^{(2)} + S_{21}^{(1)}S_{22}^{(2)}}{S_{21}^{(1)}S_{21}^{(2)}}. \tag{243}$$

Introducând această distanță redusă în ecuațiile (242), ținând cont de ecuațiile (241) și înlocuind elementele 21 prin distanțele focale corespunzătoare, obținem matricea sistemului compus afocal în forma

$$S = \begin{bmatrix} -f_{21}/f_{12} & \left(f_{12}S_{11}^{(2)} + f_{21}S_{22}^{(1)}\right)/n \\ 0 & -f_{12}/f_{21} \end{bmatrix}. \tag{244}$$

Expresiile generale ale măririlor (234) - (236) devin în acest caz

$$\begin{cases} m_u = \dfrac{n_1}{n_2} S_{22} = -\dfrac{f_{11}}{f_{22}}, \\ m_t = S_{11} = -\dfrac{f_{21}}{f_{12}}, \\ m_a = \dfrac{n_2}{n_1} S_{11}^2 = \dfrac{f_{21}f_{22}}{f_{11}f_{12}}. \end{cases} \tag{245}$$

Pentru comparație cu metoda analitică prezentată mai sus, fig.58 arată construcția geometrică a imaginii într-un dublet afocal cu ajutorul razelor principale care trec prin focarele $F_{11}$, $F_{12} = F_{21}$, $F_{22}$ ale celor două subsisteme componente $S_1$, $S_2$. Mai întâi observăm că, din asemănarea triunghiurilor $IH_{12}F_{12}$ și $JH_{21}F_{21}$ rezultă $m_t \stackrel{def}{=} y_2/y_1 = -f_{21}/f_{12} = const.$ pentru orice pereche de plane conjugate. Apoi, din invariantul Lagrange-Helmholtz $n_1 y_1 \gamma_1 = n_2 y_2 \gamma_2$ (ecuația (97)), avem

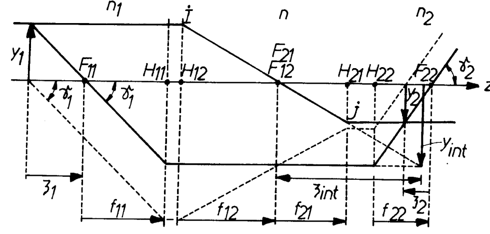



**Fig.58.** Construcția imaginii într-un dublet afocal.

$m_u \stackrel{def}{=} \gamma_2/\gamma_1 = n_1 y_1/n_2 y_2 = -n_1 f_{12}/n_2 f_{21} = -f_{11}/f_{22}$. În fine, aplicând succesiv formula lui Newton, ecuația (183), avem $\zeta_1 \zeta_{int} = f_{11} f_{12}$, $-\zeta_{int}\zeta_2 = f_{21} f_{22}$, de unde, prin eliminarea lui $\zeta_{int}$ și diferențiere, rezultă $m_a \stackrel{def}{=} -d\zeta_2/d\zeta_1 = f_{21}f_{22}/f_{11}f_{12}$. Am obținut astfel, pe o cale geometrică intuitivă, expresiile măririlor (245).

În particular dacă mediile extreme și intermediar sunt aceleași $(n_1 = n = n_2)$ vom nota $f_{11} = f_{12} = f_1$, $f_{21} = f_{22} = f_2$ astfel că formulele (240), (245) ale dubletului afocal se scriu simplu

$$f_1 + f_2 = d, \tag{246}$$

$$m_u = -f_1/f_2, \quad m_t = -f_2/f_1, \quad m_a = (f_2/f_1)^2. \tag{247}$$

Remarcăm că acestea sunt identice cu formulele dubletului afocal de lentile subțiri, cum ne putem convinge folosind elementele de matrice (209).

O aplicație relevantă a dubletului afocal este ***telescopul de refracție*** sau ***luneta***, instrument optic destinat observării obiectelor îndepărtate. Ca și microscopul compus, aceasta constă dintr-un obiectiv convergent $S_1$ $(f_1 > 0)$ care dă o imagine intermediară inversată $y_{int}$, și un ocular $S_2$, convergent sau divergent, care joacă rolul de lupă. Datorită distanțelor foarte mari până la obiectul cercetat, și spre deosebire de microscop, imaginea intermediară se formează în planul focal imagine $(F_{12})$ al unui obiectiv de distanță focală mare. În mod normal, telescopul, funcționează ca dublet afocal astfel că ocularul, mobil, este deplasat până la coincidența focarelor interioare, $F_{12} = F_{21}$, pentru ca ochiul să privească relaxat (neacomodat) imaginea finală virtuală localizată la infinit. În figurile următoare este ilustrat principiul lunetei pentru trei variante: ***luneta astronomică*** sau ***luneta lui Kepler*** $(f_1 > 0,\ f_2 > 0,\ \text{deci}\ \ m_u < 0)$, fig.59,a, ***luneta lui Galilei*** $(f_1 > 0, f_2 < 0,\ deci\ m_u > 0)$ fig.59,b, și ***luneta terestră*** $(f_1 > 0, f_v > 0,\ f_2 > 0,\ deci\ m_u > 0)$, fig.60, unde, pentru conveniență, sistemele componente sunt reprezentate prin lentile subțiri $L_1, L_2, L_v$, cu distanțele focale corespunzătoare $f_1,\ |f_2|, f_v$ în raportul 7 : 3 : 4. Lentila intermediară sau ***lentila vehicul*** $L_v$ introdusă în luneta terestră, reprezintă sistemul convergent care asigură redresarea imaginii cu raportul $m_t = -f_v/\zeta_1 = -\zeta_2/f_v = -1$ (vezi ecuația (185)). Observăm că, la mărire unghiulară egală (în cazurile discutate aici $|m_u| = 7/3$), luneta lui Galilei $(d = f_1 - |f_2|)$ este mai scurtă, iar luneta terestră $(d = f_1 + f_2 + 4f_v)$ este mai lungă decât luneta astronomică $(d = f_1 + f_2)$.

În general, datorită depărtării mari a obiectelor observate, razele utile care traversează obiectivul au o înclinare $\gamma_1$ foarte mică față de axul optic. În acest caz, aberația cea mai importantă este aberația cromatică axială. Din acest motiv, obiectivul telescoapelor de refracție reprezintă, în practică, un sistem acromatizat de lentile alipite, de regulă dublet sau triplet acromat.

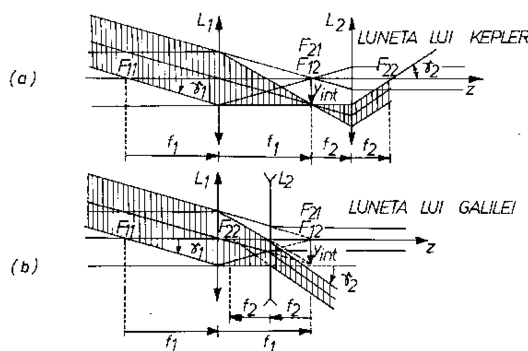



**Fig.59.** Luneta lui Kepler (a) și luneta lui Galilei (b).

Deseori, în locul observației vizuale se preferă înregistrarea fotografică. Pentru astfel de aplicații, în continuare (și coaxial cu sistemul telescopic) se montează un sistem de formare a unei imagini finale reale, cum este dubletul teleobiectiv discutat mai înainte.

O altă aplicație interesantă a dubletului afocal este aceea de ***expandor de fascicul***, folosit pentru creșterea secțiunii transversale a unui fascicul îngust de radiație laser. Pentru aceasta, în fig.59, fasciculul laser se trimite axial, de la dreapta spre stânga. Observăm că dubletul galileian (b) este preferabil celui keplerian (a) la puteri laser mari, pentru a evita ionizarea și străpungerea optică a aerului în focarul interior real. Cum rezultă din geometria figurii, raportul liniar de expandare al unui fascicul axial (sau, în general, paraxial) este egal cu modulul măririi unghiulare $|m_u| = |f_1/f_2|$.

## *D. Sistemul triplet*

Până acum am analizat proprietățile de formare a imaginilor cu ajutorul unui dublet de sisteme dioptrice coaxiale. Este interesant de extins formulele obținute pentru triplet ș.a.m.d., datorită posibilităților suplimentare de ajustare a distanțelor dintre sistemele componente. Astfel, ca și în cazul dubletului, formulele pentru ***sistemul triplet*** se deduc din matricea de transfer corespunzătoare $S = S_3 T_2 S_2 T_1 S_1$ . Pentru ilustrare, să considerăm un triplet de lentile subțiri, imersat în același mediu, de tipul reprezentat în fig.60. În acest caz, formula convergenței, a lui Gullstrand, ecuația (210), se extinde în forma

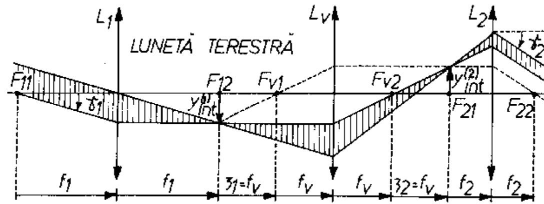


**Fig.60.** Luneta terestră

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} + \frac{1}{f_3} - \frac{1}{f_1}\left(\frac{1}{f_2} + \frac{1}{f_3}\right) d_{12} - \frac{1}{f_3}\left(\frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2}\right) d_{23} + \frac{d_{12} d_{23}}{f_1 f_2 f_3} \quad , \qquad (248)$$

unde $d_{12}$ și $d_{23}$ sunt distanțele dintre prima și a doua lentilă, respectiv dintre a doua și a treia lentilă. Vom folosi această expresie pentru descrierea principiului de funcționare al unui ***sistem "Zoom" (transfocator)***. Prin definiție, un astfel de sistem permite variația continuă a distanței sale focale, deci a măririi, fără a schimba poziția imaginii. Aceasta se realizează cel mai simplu cu un triplet de lentile subțiri prin modificarea poziției lentilei din mijloc față de celelalte două, care rămân fixe. Notând distanța dintre acestea cu d, avem $d_{12} = x$ și $d_{23} = d - x$ , astfel că expresia convergenței, ecuația (248), capătă forma $1/f = F(x) = Ax^2 + Bx + C$ , unde A, B, C sunt constante. Ecuația $F(x) = 0$ admite, în general, două rădăcini, $x_1, x_2$ , în afara cărora convergența $1/f \neq 0$. Pentru a realiza distanțe focale mari și variabile, sistemul este proiectat astfel încât să permită excursii în jurul acestor rădăcini. De regulă, se mai impune condiția suplimentară ca rădăcinile să fie confundate pentru ca deplasările lentilei din mijloc în jurul poziției $x_1 = x_2$ să aibă consecințe simetrice.

## *E. Sisteme reflectante (catoptrice)*

Spre deosebire de sistemele dioptrice considerate până acum, ***sistemele reflectante (catoptrice)*** prezintă avantajul important că nu au aberații cromatice. În plus, la dimensiuni mari, sunt mult mai ușor de fabricat oglinzi decât lentile. Aceste avantaje au fost folosite în construcția ***telescoapelor de reflexie***, cum se arată în fig.61 pentru variantele lor principale (Newton, Herschel, Gregory, Cassegrain), în care rolul obiectivului îl joacă o oglindă parabolică concavă (oglinda principală). În calea razelor reflectate de acest obiectiv se interpune o mică oglindă (oglinda secundară) care deplasează planul focal F al sistemului într-o poziție convenabilă pentru un instrument vizual (ocularul), pentru suportul plăcii sau filmului de fotografiat, pentru receptorii fotoelectrici sau pentru analiza spectrală. Excepție face numai ***telescopul lui Herschel***, în care deplasarea focarului F se realizează direct, printr-o ușoară înclinare a oglinzii principale (aleasă de distanță focală suficient de mare). În telescopul lui Newton (sau telescopul cu viziune laterală) este folosită o oglindă secundară

plană care deviază fasciculul perpendicular pe axul optic. În ***telescopul lui Gregory*** focarul oglinzii principale parabolice coincide cu primul focar al unei oglinzi secundare eliptice concave, astfel că focarul F al întregului sistem se formează în al doilea focar al acesteia iar fasciculul iese axial printr-un mic orificiu circular practicat în centrul oglinzii principale. În mod similar funcționează și ***telescopul lui Cassegrain***, cu singura deosebire că oglinda secundară este hiperbolică și convexă. În aceste telescoape este folosită proprietatea de stigmatism riguros a focarelor suprafețelor carteziene de reflexie (paraboloidul, elipsoidul și hiperboloidul), cum am arătat în paragraful 1.3. Focarele acestor suprafețe nu sunt însă și aplanetice astfel că deschiderea unghiulară în care se pot obține imagini clare este de numai câteva minute de arc. O soluție ingenioasă este folosită în ***sistemul optic al lui Schmidt*** (fig.61) în care aberațiile de sfericitate ale oglinzii principale sferice (nu parabolice) sunt eliminate cu ajutorul unei lame refringente corectoare potrivite, care are o suprafață plană și o suprafață șlefuită după o curbă ușor toroidală. În acest fel, razele marginale și razele paraxiale sunt aduse în același focar F unde se află suportul sferic al filmului fotografic. Datorită deschiderii sale unghiulare foarte mari, de aproximativ $25^o$, telescopul lui Schmidt reprezintă un instrument ideal pentru cercetarea cerului de noapte. Acest sistem este compus din elemente reflectante (catoptrice) și refringente (dioptrice), făcând astfel parte din categoria ***sistemelor catadioptrice***. Din aceeași categorie face parte și ***telescopul lui Maksutov*** (fig.61), cu oglindă secundară convexă sau concavă, în care aberația de sfericitate a oglinzii principale sferice este corectată cu ajutorul unei lentile menisc, mult mai ușor de confecționat decât suprafața asferică a lamei corectoare Schmidt.

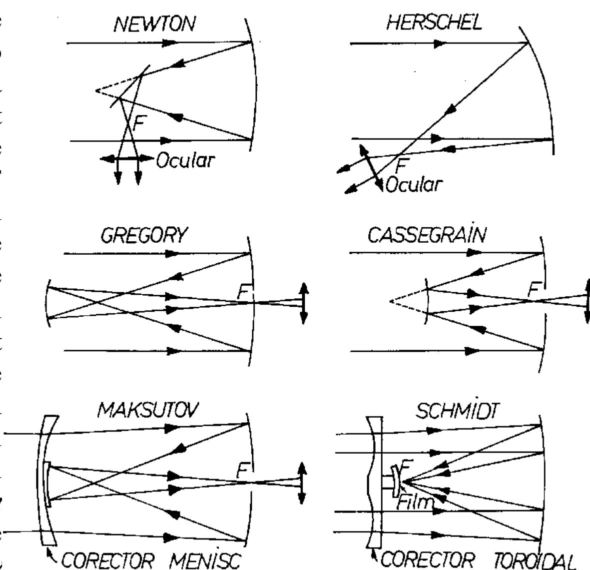



**Fig.61.** Principalele tipuri de telescoape de reflexie.

Ca și în cazul microscopului (vezi formula lui Abbe, ecuația (123)), difracția luminii impune o limită inferioară pentru deschiderea unghiulară $\gamma_1$ dintre cele două surse punctuale îndepărtate (de exemplu dintre componentele unei stele duble) care mai poate fi rezolvată de obiectivul unui telescop, și anume

$$(\gamma_1)_{\min} = 1,22\frac{\lambda}{D}, \tag{249}$$

unde D este diametrul lentilei sau oglinzii obiectivului. ***Puterea de rezoluție unghiulară a telescopului***, definită ca $1/(\gamma_1)_{\min}$, este astfel proporțională cu $D/\lambda$.

Pentru ilustrare, să considerăm mai întâi ochiul care, atunci când observă obiecte îndepărtate, se comportă ca un obiectiv de telescop de refracție. Considerând $D \approx 2\,mm$, corespunzător diametrului pupilei ochiului relaxat la lumina zilei, și $\lambda \approx 500\,nm$ , din ecuația (249) rezultă $(\gamma_1)_{\min} \approx 1'$ . Este remarcabil faptul că această valoare coincide cu limita fiziologică dată de structura granulară a retinei, ecuația (189). Aceasta înseamnă că ochiul uman realizează maximul din ceea ce permite limita fundamentală, ecuația (249), impusă de natura ondulatorie a luminii. Pentru comparație cu ochiul, în tabelul următor sunt date diametrele câtorva telescoape și deschiderea unghiulară minimă pentru $\lambda \approx 500\ nm$. Cele mai mari diametre sunt la Yerkes pentru refractor și în Caucaz pentru reflector.

| Obiectiv | D (cm) | $(\gamma_1)_{\min}$ | Observatorul |
|---|---|---|---|
| ochiul | 0,2 | 1’ | |
| lentilă | 12 | 1" | |
| oglindă parabolică | 50 | 0,24" | București |
| lentilă | 75 | 0,16" | Pulkovo, Rusia |
| lentilă | 102 | 0,12" | Yerkes, SUA |
| oglindă parabolică | 258 | 0,047" | Mount Wilson, SUA |
| oglindă parabolică | 508 | 0,024" | Mount Palomar, SUA |
| oglindă parabolică | 600 | 0,020" | Caucaz |

În practică, telescoapele de refracție sunt folosite pentru măsurători de unghiuri și observarea suprafețelor planetelor iar telescoapele de reflexie (mai ales) pentru analiza spectrală a luminii provenite de la corpurile cerești. Puterea de rezoluție utilizabilă la altitudine mică nu depășește valoarea corespunzătoare la $(\gamma_1)_{\min} \approx 0,5''$ datorită fluctuațiilor indicelui de refracție de-a lungul traiectoriei razelor de lumină prin atmosfera terestră. De aceea, locul în care sunt instalate marile observatoare astronomice este ales în funcție de calitățile optice ale atmosferei sale. Influența detrimentală a agitației atmosferice se poate elimina complet numai prin instalarea telescoapelor la bordul navelor spațiale sau pe suprafața Lunii.

În principiu, mărirea unghiulară $m_u = -f_1/f_2$ , ecuația (247), poate fi oricât de mare dacă distanța focală $f_1$ a obiectivului este foarte mare iar distanța focală $f_2$ a ocularului este foarte mică. În practică, lungimea telescopului este determinată de distanța focală $f_1$ a obiectivului. ***Mărirea unghiulară utilă*** a telescopului este limitată însă de puterea de rezoluție a obiectivului și a ochiului observatorului. Astfel, ținând cont că $\gamma_2 = m_u \gamma_1 \geq (\gamma_1)^{ochi}_{\min}$ din ecuațiile (189) și (249) rezultă mărirea unghiulară utilă maximă

$$|m_u| = (\gamma_1)^{ochi}_{\min}\ D/1,22\lambda.$$

Luând $(\gamma_1)^{ochi}_{\min} \approx 1' \approx (1/3400) rad$ și $\lambda \approx 5000\ \overset{0}{A} = 5 \cdot 10^{-5}\ cm$ , avem $|m_u| \approx 5D\ (cm)$. Practic însă recunoașterea detaliilor la limita de rezoluție unghiulară a ochiului implică un efort de atenție considerabil, astfel că se recomandă folosirea unei măriri unghiulare de circa 4 ori mai mare, de unde rezultă ***regula utilă*** $|m_u| \approx 20\,D\,(cm)$. Creșterea mai departe a măririi unghiulare peste această valoare nu mai îmbunătățește vizibilitatea obiectului ci numai pe aceea a discurilor difuze Airy de difracție.

## § 2. 6. Diafragme

În studiul sistemelor optice centrate ne-am interesat, până acum, numai de formarea imaginilor, reale sau virtuale, în poziții convenabile pentru înregistrare sau observare vizuată. Alte proprietăți importante ale imaginii, cum sunt strălucirea și câmpul de vedere, depind de limitarea fasciculului de lumină prin ***diafragme***, adică prin aperturi în ecrane opace sau prin însăși bordura lentilelor și oglinzilor care constituie sistemul optic. Pentru conveniență, în continuare vom analiza problema diafragmelor cu apertură circulară în aproximația paraxială.

Așadar, să considerăm o pereche de plane conjugate care intersectează axul optic în punctul obiect $P_1$, respectiv în punctul imagine $P_2$. Prin definiție, ***diafragma de apertură*** $\Delta$ a sistemului este acea diafragmă sau bordură de element optic (lentilă, oglindă) care limitează cel mai mult fasciculul de raze care provine de la punctul obiect axial $P_1$ (vezi fig.62 pentru cazul general și fig.63 pentru cazul particular al unui triplet de lentile subțiri). Pentru a determina care dintre diafragmele sistemului reprezintă diafragma de apertură corespunzătoare punctului $P_1$, să considerăm mai întâi matricea de transfer $M_{P_1\Delta}$ dintre planul de referință care trece prin $P_1$ și planul unei diafragme, deocamdată oarecare, cu apertura de rază R.

Ecuația (161) de transfer $y_2 = M_{11}y_1 + M_{12}\Gamma_1$, pentru o rază care trece prin $P_1(y_1 = 0,\ n_1 = 1,\ \Gamma_1 = \gamma_1)$ și pe la marginea aperturii $(y_2 = R)$, se scrie sub forma $R = M_{12}\gamma_1$, adică

$$\gamma_1 = R/M_{12}.$$

Conform definiției, rezultă astfel că diafragma de apertură este acea diafragma sau bordură de lentilă pentru care $\gamma_1$, adică raportul $R/M_{12}$, este cel mai mic. Această diafragmă, notată cu $\Delta$ în fig.62 și 63, respectiv unghiul $\gamma_1$ corespunzător, denumit ***apertura unghiulară*** (de partea obiectului), prezintă o deosebită importanță deoarece ea determină atât fluxul de lumină colectat de sistem, deci strălucirea imaginii, cât și puterea de rezoluție a sistemului (vezi apertura numerică $n_1 \sin\gamma_1$ a obiectivului de microscop, ecuația (123)). Imaginea diafragmei de apertură formată de partea anterioară a sistemului (de sistemul $S_1$ în fig.62, respectiv de prima lentilă în fig.63) poartă numele de ***pupilă de intrare*** $(\Pi_1)$ iar cea formată de partea

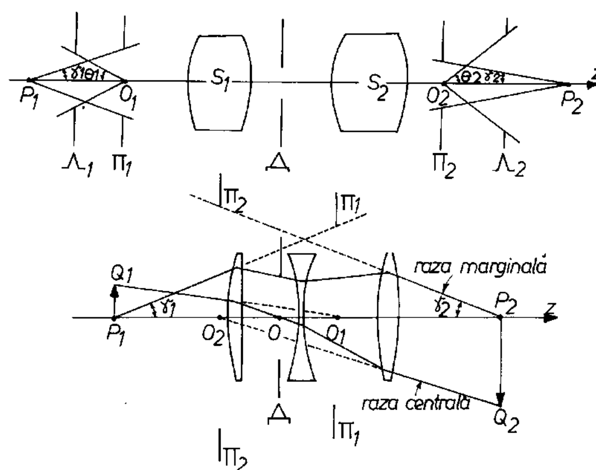



**Fig.62.** Diafragma de apertură, pupilele și lucarnele unui sistem general.
**Fig.63.** Diafragma de apertură, pupilele și lucarnele unui triplet de lentile subțiri.

posterioară a sistemului (de subsistemul $S_2$ în fig.62, respectiv de ultimele două lentile în fig.63) se numește ***pupilă de ieșire*** $(\Pi_2)$. Evident, pupila de ieșire este imaginea pupilei de intrare formată de întregul sistem. Observăm că apertura unghiulară $\gamma_1$ a conului de lumină care intră în sistem este determinată de pupila de intrare iar apertura unghiulară (de partea imaginii) sau unghiul de proiecție $\gamma_2$, este determinată de pupila de ieșire.

O altă metodă de determinare a pupilei de intrare, echivalentă cu cea descrisă deja, constă în a forma imaginea tuturor diafragmelor și bordurilor de către lentilele anterioare corespunzătoare; imaginea cu unghiul $\gamma_1(P_1)$ cel mai mic este pupila de intrare, iar elementul fizic respectiv este diafragma de apertură a sistemului pentru punctul $P_1$ considerat. Alternativ, putem forma imaginea tuturor diafragmelor și bordurilor de către lentilele posterioare și determina pupila de ieșire ca imaginea cu unghiul $\gamma_2(P_2)$ cel mai mic. În general, dacă schimbăm poziția punctului obiect $P_1$, respectiv și a punctului său conjugat imagine $P_2$, poate deveni operantă o altă diafragmă de apertură, respectiv o altă pereche conjugată de pupile. Dacă lentila frontală sau o diafragmă anterioară lentilei frontale, au o apertură suficient de mică, atunci chiar aceasta constituie diafragma de apertură și, totodată pupila de intrare a sistemului. La telescoape acest rol îl asumă, de regulă, bordura lentilei obiectivului astfel că imaginea acesteia formată de ocular reprezintă pupila de ieșire a sistemului. Cum am arătat, ecuația (249), diametrul D al obiectivului determină puterea de rezoluție unghiulară a telescopului.

Localizarea și mărimea pupilelor sistemelor optice prezintă o importanță practică deosebită. Astfel, la sistemele vizuale, ochiul observatorului este plasat în centrul pupilei de ieșire a instrumentului iar aceasta trebuie să corespundă pupilei de intrare a ochiului, adică imaginii aperturii irisului formată de cornea transparentă și de umoarea apoasă. Pentru alinierea comodă a ochiului cu instrumentul, pupila de ieșire a acestuia trebuie să fie ceva mai mare decât pupila de intrare a ochiului. De exemplu, dacă este destinat observațiilor de zi, telescopul trebuie să aibă o pupilă de ieșire de 3-4 mm și de cel puțin 8 mm - pentru observațiile de noapte. De altfel, termenul de "pupilă" provine de la cerința ca pupila de ieșire a instrumentelor vizuale să fie aproximativ egală cu pupila de intrare a ochiului.

Mai departe, să considerăm obiectivul fotografic, teleobiectivul și obiectivul de telescop, destinate să formeze imaginea obiectelor îndepărtate. În acest caz, aria imaginii este proporțională cu pătratul distanței focale a obiectivului, $f^2$ (conform cu $y_2 = -(y_1/p_1)f$, ecuația (230)). Pe de altă parte, fluxul de lumină colectat este proporțional cu aria aperturii obiectivului (cu aria pupilei de intrare), adică cu $D^2$. Prin urmare, densitatea fluxului de lumină în planul imaginii variază ca $(D/f)^2$. Raportul D/f poartă numele de ***apertură relativă*** iar inversul acestuia de ***numărul f***, adică

$$\text{"\textbf{numărul f}"} \stackrel{def}{=} f/D.$$

Deoarece timpul de expunere fotografică este proporțional cu $(f/D)^2$, "numărul f" mai poartă și numele de ***viteza lentilei***. Astfel, de exemplu, o lentilă cu distanța focală de 5 cm și apertura de 2,5 cm are "numărul f" egal cu 2 și se notează cu simbolul f/2. Diafragma obiectivelor aparatelor de fotografiat este marcată în "numere f" și anume 1; 1,4; 2; 2,8; 4; 5,6; 8; 11; 16; 22, numerele consecutive crescând cu factorul multiplicativ $\approx \sqrt{2}$ ceea ce înseamnă o scădere a aperturii relative cu factorul $\approx 1/\sqrt{2}$, respectiv o scădere a densității fluxului de lumină în planul imaginii cu factorul $\approx 1/2$. În acest fel, de exemplu, aceeași

cantitate de energie luminoasă trece prin diafragma $f/1,4$ în (1/500) s, prin diafragma f/2 în (1/250) s sau prin diafragma f/2,8 în (1/125) s.

Diafragma de apertură și pupilele asociate joacă un rol important în formarea imaginilor obiectelor spațiale. Pentru ilustrare, să considerăm un sistem obiectiv la care apertura diafragmei, de diametru D, reprezintă pupila de intrare $\Pi_1$ (fig.64). Să observăm printr-o placă de sticlă mată, ca ecran de focalizare, imaginea $P_2$ a unui punct obiect axial $P_1$.La rigoare, va trebui să plasăm acest ecran chiar în planul imaginii $P_2$. Deplasând ecranul înainte și înapoi, cu distanța $\pm d\zeta_2$ pentru a pune la punct imaginea cu ochiul liber, acesta însă nu este foarte critic și va tolera pentru punctul $P_2$ un ***cerc de minimă difuzie*** al cărui diametru poate să ajungă până la valoarea $\delta \approx (\gamma_1)_{\min}^{ochi}\, 250\, mm = (1/3400) 250\, mm \approx 0,07\, mm$ fără a sesiza o pierdere apreciabilă a clarității imaginii.

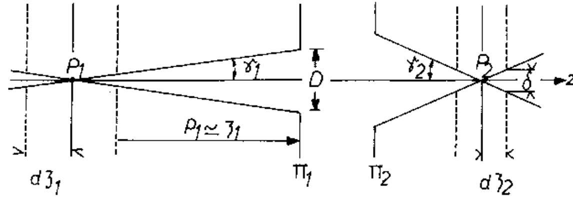


**Fig.64.** Definirea cercului de minimă difuzie și adâncimea câmpului (de focalizare).

Evident, dacă pentru punerea la punct a imaginii folosim o lupă, diametrul $\delta$ al cercului de minimă difuzie va fi de câteva (G) ori mai mic decât la observarea cu ochiul liber. În acest caz, rezultă un interval de toleranță, denumit ***profunzimea câmpului*** sau ***adâncimea de focalizare*** în spațiul imaginii

$$|d\zeta_2| = \frac{\delta}{2\gamma_2} = \frac{f\delta}{D}, \tag{250}$$

unde, pentru a obține ultima expresie am folosit teorema Langrange-Helmholtz $y_1\gamma_1 = y_2\gamma_2$, ecuația (97), expresia măririi $y_2/y_1 = -f/\zeta_1$, ecuația (183), și am presupus că obiectul observat este suficient de îndepărtat astfel că $\zeta_1 = p_1 - f \approx p_1 (>>f)$ și $2\gamma_1 p_1 = D$. Rezultă astfel că profunzimea câmpului în spațiul imaginii este invers proporțională cu apertura unghiulară, respectiv cu diametrul pupilei de intrare. Profunzimii câmpului $|d\zeta_2|$ în spațiul imaginii îi corespunde o profunzime a câmpului $|d\zeta_1|$ în spațiul obiectului. Astfel, folosind formula lui Newton $\zeta_1\,\zeta_2 = f^2$ , ecuația (18), respectiv relația $\zeta_2 \cdot d\zeta_1 + \zeta_1 \cdot d\zeta_2 = 0$, precum și expresia de mai sus a lui $|d\zeta_2|$, obținem

$$|d\zeta_1| = \frac{|\zeta_1|}{|\zeta_2|}|d\zeta_2| = \frac{\delta}{f} \cdot \frac{p_1^2}{D}. \tag{251}$$

Găsim astfel că profunzimea câmpului în spațiul obiectului este proporțională cu pătratul distanței până la obiect și invers proporțională cu diametrul pupilei de intrare (fapt cunoscut, calitativ, de orice fotograf amator). În concluzie, efectul de profunzime a câmpului este determinat de valoarea finită a diametrului $\delta$ al cercului de minimă difuzie, respectiv a rezoluției unghiulare a ochiului $(\gamma_1)_{\min}^{ochi} \approx 1'$, ecuația (189). Această valoare indică totodată și limita până la care are sens să fie corectate aberațiile instrumentelor optice.

O importanță deosebită pentru proiectarea sistemelor optice o au razele marginale și razele centrale. Astfel, razele care provin de la un punct obiect axial și trec efectiv pe la marginea diafragmei de apertură se numesc ***raze marginale*** (fig.63). Orice rază marginală intră în sistem de-a lungul unei drepte care trece pe la marginea pupilei de intrare și iese din sistem de-a lungul unei drepte conjugate care trece pe la marginea pupilei de ieșire. Raza care provine de la un punct obiect extra-axial și trece efectiv prin centrul O al diafragmei de apertură se numește ***raza centrală*** a acelui punct (fig.63). Această rază intră în sistemul optic de-a lungul unei drepte care trece prin centrul $O_1$ al pupilei de intrare și iese din sistem de-a lungul unei drepte conjugate care trece prin centrul $O_2$ al pupilei de ieșire. Spre deosebire de diafragma de apertură, care definește razele marginale și controlează fluxul de lumină care trece prin sistem, ***diafragma de câmp*** este acea diafragmă sau bordură de lentilă care limitează cel mai mult fasciculul de raze centrale care provine de la punctele obiectivului, controlând astfel, ca printr-o fereastră, câmpul de vedere al sistemului. Imaginea diafragmei de câmp formată de partea anterioară a sistemului poartă numele de ***fereastră (lucarnă) de intrare*** ($\Lambda_1$) iar cea formată de partea posterioară se numește ***fereastră (lucarnă) de ieșire*** ($\Lambda_2$) , fig.62. Evident, ca și pupilele, aceste două ferestre se află în poziții conjugate față de întregul sistem optic.

O metodă sistematică de determinare a diafragmei de câmp constă în a forma imaginea tuturor diafragmelor și bordurilor de către lentilele anterioare; imaginea văzută din centrul pupilei de intrare sub unghiul cel mai mic (***unghiul de acceptare*** sau ***câmpul unghiular obiect***, $\theta_1$ ) reprezintă fereastra de intrare iar elementul fizic corespunzător este diafragma de câmp. Alternativ, putem forma imaginea tuturor diafragmelor și bordurilor de către lentilele posterioare și determina fereastra de ieșire ca imaginea văzută din centrul pupilei de ieșire sub unghiul cel mai mic (***câmpul unghiular imagine*** $\theta_2$ ); elementul fizic corespunzător este diafragma de câmp.

***Câmpul de vedere*** dintr-un plan obiect oarecare, cu punctul axial $P_1$, este definit ca mulțimea punctelor din acest plan care trimit raze de lumină în sistemul optic (fig. 65,a). Aceste puncte sunt situate deci în interiorul cercului cu centrul în $P_1$, de rază $P_1S$, și se împart în două categorii: punctele analoage cu punctul axial $P_1$, cum este punctul extra-axial Q, care trimit în sistem fascicule conice de lumină care umplu integral pupila de intrare și puncte analoage cu punctul extra-axial R, ale căror fascicule sunt obturate parțial de fereastra de intrare $\Lambda_1$ prin ***efectul de fereastră*** sau ***vignetare*** (fig.65,b). Punctele situate în cercul de rază $P_1Q$ constituie ***câmpul de apertură plină***, conjugatul său din planul imaginii fiind cel mai iluminat, iar punctele situate în inelul circular cuprins între razele $P_1Q$ și $P_1S$ constituie ***câmpul de contur***, în conjugatul căruia, din planul imaginii, iluminarea se atenuează rapid de la valoarea mare de pe cercul interior la valoarea zero pe cercul exterior. În câmpul de contur există un cerc intermediar, de rază $P_1R$, (corespunzătoare câmpului unghiular $\theta_1$ ), pe conjugatul căruia iluminarea este aproximativ jumătate din valoarea din centrul câmpului

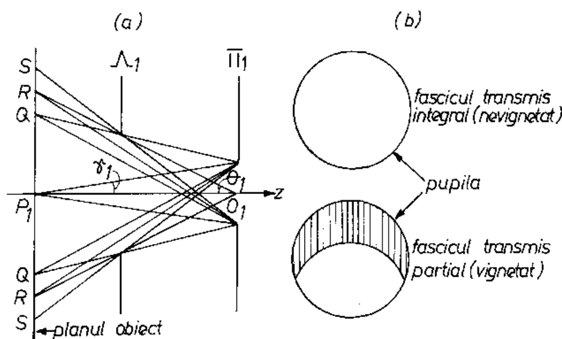



**Fig.65.** Definirea câmpului de vedere și evidențierea efectului de vignetare.

(total) de vedere. În concluzie, datorită efectului de fereastră, câmpul de vedere obiect și imagine nu prezintă o margine netă. Pentru a elimina acest inconvenient din instrumentele optice, diafragma de câmp este plasată chiar în planul unei imagini intermediare, astfel că fereastra de intrare se află în planul obiectului iar fereastra de ieșire în planul imaginii. În acest fel, tot câmpul de vedere devine câmp de apertură plină, cu o iluminare aproape uniformă, iar câmpul de contur se reduce la o margine circulară netă.

Să considerăm mai în detaliu distribuția iluminării unei imagini reale, formată de un sistem optic centrat, în domeniul câmpului de apertură plină. Pentru aceasta vom presupune că obiectul reprezintă o mică suprafață plană, de arie $dS_1$, perpendiculară pe axul optic, care radiază conform legii lui Lambert, adică radianța (strălucirea, luminanța) sa $L_1$ nu depinde de unghiul $\gamma$, vezi paragraful 1.3 (fig.66). Fluxul de energie emis de punctul obiect axial $P_1$ în unghiul solid $d\Omega_{P_1} = 2\pi \sin\gamma d\gamma$ este

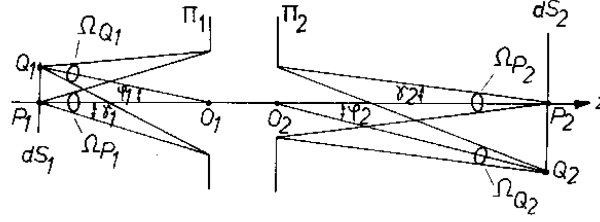



**Fig.66.** Pentru determinarea iluminării imaginii aplanetice a unei surse lambertiene.

$$d^2F_1 = L_1 d\Omega_{P_1} dS_1 \cos\gamma = 2\pi L_1 dS_1 \cos\gamma \sin\gamma d\gamma. \qquad (252)$$

Prin integrare între $\gamma = 0$ și apertura unghiulară $\gamma_1$, rezultă fluxul de energie care trece prin pupila de intrare, adică

$$dF_1 = \pi L_1 dS_1 \sin^2\gamma_1. \qquad (253)$$

În mod similar, obținem fluxul de energie conjugat care trece prin pupila de ieșire și se îndreaptă spre punctul imagine axial $P_2$, adică

$$dF_2 = \pi L_2 dS_2 \sin^2\gamma_2. \qquad (254)$$

Presupunând că sistemul optic satisface condiția de sinus a lui Abbe, respectiv că elementul de suprafață $dS_2$ este imaginea aplanetică a elementului $dS_1$, mai avem relația (ecuația (106))

$$dS_1 n_1^2 \sin^2\gamma_1 = dS_2 n_2^2 \sin^2\gamma_2. \qquad (255)$$

Cum am arătat deja în paragraful 1. 3, condiția de bilanț energetic $dF_2 = TdF_1$, unde $T \leq 1$ reprezintă factorul de transmisie (transparență) al sistemului*, împreună cu ecuațiile (253) - (255), conduc la ***teorema lui Clausius***

---

* Considerăm T independent de $\lambda$. Factorul de transmisie la incidență normală sau aproape normală pe suprafața de separare aer-sticlă sau sticlă-aer este T = 0,96. Pentru o lentilă subțire de sticlă în aer avem deci $T = 0{,}96^2 \approx 0{,}92$. Dacă ținem cont și de absorbția luminii în sticla optică (A = 0,98 pe un cm de parcurs) rezultă că pentru o lentilă de sticlă, groasă de 1 cm, în aer, avem T = 0,90.

$$L_2 = (n_2/n_1)^2 T L_1 \le (n_2/n_1)^2 L_1 \quad . \tag{256}$$

De aici rezultă că, dacă $n_1 = n_2$ , radianța imaginii nu poate depăși radianța obiectului.

Din ecuațiile (254), (256) rezultă ***iluminarea*** (densitatea fluxului de energie) în planul imaginii

$$E_2 \overset{def}{=} dF_2/dS_2 = \pi (n_2/n_1)^2 T L_1 \sin^2\gamma_2 \quad . \tag{257}$$

Pentru aperturi unghiulare suficient de mici $(\gamma_2 << 1)$ , unghiul solid sub care este văzută pupila de ieșire din punctul axial imagine $P_2$ este $\Omega_{P_2} \cong \pi |O_2P_2|^2 \sin^2\gamma_2 / |O_2P_2|^2 = \pi \sin^2\gamma_2$ , astfel că ecuația (257) devine

$$E_2 = (n_2/n_1)^2 T L_1 \Omega_{P_2} \quad . \tag{258}$$

Această expresie este valabilă pentru iluminarea într-un punct imagine axial $P_2$. Reluând raționamentul pentru un punct imagine extra-axial $Q_2$ , obținem

$$E_2 = (n_2/n_1)^2 T L_1 \Omega_{Q_2} \cos\varphi_2 , \tag{259}$$

unde $\Omega_{Q_2}$ este unghiul solid sub care este văzută pupila de ieșire din punctul $Q_2$ iar $\varphi_2$ este unghiul dintre raza centrală $O_2Q_2$ și axul optic. Notând cu $\Sigma$ aria pupilei de ieșire, avem

$$\Omega_{P_2} = \frac{\Sigma}{|O_2P_2|^2} , \qquad \Omega_{Q_2} = \frac{\Sigma \cos\varphi_2}{|O_2Q_2|^2} ,$$

de unde, ținând cont că $|O_2P_2| = |O_2Q_2| \cos\varphi_2$ , rezultă

$$\Omega_{Q_2} = \Omega_{P_2} \cos^3\varphi_2 \quad .$$

Cu ajutorul acestei relații, expresia generală (259) a iluminării imaginii aplanetice a unei surse lambertiene se scrie

$$E_2 = (n_2/n_1)^2 T L_1 \Omega_{P_2} \cos^4\varphi_2 \quad . \tag{260}$$

Această "lege de cosinus la puterea a patra" conduce la o scădere destul de rapidă a iluminării imaginii cu creșterea unghiului de câmp $\varphi_2$. Contracмеханarea acestui efect și uniformizarea iluminării imaginii se realizează în practică prin violarea condiției de aplanetism și introducerea deliberată a aberațiilor de coma. Crescând mai departe unghiul de câmp până la valoarea $\varphi_2 \cong \theta_2$ , caracteristică câmpului de contur, iluminarea scade drastic datorită efectului de vignetare.

## § *2. 7. Aberații cromatice*

Până acum am considerat că lumina este monocromatică astfel că, în formulele opticii geometrice, indicele de refracție **n** apare ca o constantă unică de material. În general însă, datorită fenomenului de ***dispersie a luminii***, indicele de refracție depinde de lungimea de undă. Astfel, pentru majoritatea materialelor optice transparente, cum sunt sticlele anorganice, cuarțul topit, sticla organică (plexiglasul), cristalele izotrope (fluorina sau fluorura de calciu, fluorura de litiu, clorura de sodiu, bromura de potasiu ș.a.) sau lichidele incolore, indicele de refracție este dat teoretic de ***formula lui Sellmeier***

$$n^2(\omega) = 1+\sum_i \frac{A_i}{\Omega_i^2 - \omega^2} \quad , \tag{261}$$

unde $\omega = k_0 c = 2\pi c/\lambda_0$ iar $A_i$, $\Omega_i$ sunt constatate de material. În practică se preferă formule de dispersie empirice care depind liniar de constantele de material (A, B, C, D), cum este, de exemplu, ***formula lui Cauchy***

$$n(\lambda_0) = A + \frac{B}{\lambda_0^2} + \frac{C}{\lambda_0^4} \quad . \tag{262}$$

sau, pentru interpolări mai exacte, ***formula lui Conrady***

$$n(\lambda_0) = A + \frac{B}{\lambda_0} + \frac{C}{\lambda_0^{3,5}} \quad . \tag{263}$$

O relație empirică excelentă pentru domeniul spectral larg, cuprins între 3650 $\overset{o}{A}$ și 10000 $\overset{o}{A}$, având în spectrul vizibil o precizie de ±1 la a cincea zecimală, este ***formula lui Herzberger***

$$n(\lambda_0) = A + B\lambda_0^2 + \frac{C}{\lambda_0^2 - 2,8 \cdot 10^6} + \frac{D}{(\lambda_0^2 - 2,8 \cdot 10^6)^2} \quad . \tag{264}$$

În general, indicele de refracție al mediilor optice în domeniul vizibil scade lent de la albastru spre roșu (***dispersie normală***), cum este ilustrat în tabelul de mai jos pentru două sorturi de sticlă din cele aproximativ 250 de tipuri de sticlă produse de firma Schott. De
regulă, sticlele optice sunt caracterizate prin două date și anume ***indicele de refracție mediu***, $n_g$, corespunzător unei lungimi de undă din mijlocul spectrului vizibil, și ***dispersia medie*** $\delta_n = n_a - n_r$, corespunzătoare variației indicelui de refracție pe un interval spectral convenabil. Pentru conveniență în calculul aberațiilor cromatice (cum vom arăta mai departe), dispersia materialelor optice este determinată prin ***numărul lui Abbe***

$$V \overset{def}{=} \frac{n_g - 1}{n_a - n_r} \approx \frac{n-1}{\delta n} > 0, \tag{265}$$

unde $n_a, n_g, n_r$ sunt indicii de refracție din albastru, galben și roșu corespunzând unor linii spectrale intense și cunoscute cu mare precizie și anume:

linia $F(H_\beta)$, $\lambda_a = 4861{,}327\ \overset{o}{A}$ a hidrogenului,

linia $d(D_3)$, $\lambda_g = 5875{,}618\ \overset{o}{A}$ a heliului, (266)

linia $C(H_\alpha)$, $\lambda_r = 6562{,}816\ \overset{o}{A}$ a hidrogenului.

| Domeniul spectral | Sursa de lumină | Denumirea Fraunhofer a liniei | $\lambda_0$ (Å) | Sticla crown BK 7 | Sticla flint SF 11 |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 UV | laser Ar | | 3511 | 1,53894 | |
| 2 UV | laser Ar | | 3638 | 1,53648 | |
| 3 violet | arc Hg | h | 4047 | 1,53024 | 1,84211 |
| 4 albastru | arc Hg | g | 4358 | 1,52669 | 1,82518 |
| 5 albastru | laser HeCd | | 4416 | 1,52611 | 1,82259 |
| 6 albastru | laser Ar | | 4579 | 1,52462 | 1,81596 |
| 7 albastru | laser Ar | | 4658 | 1,52395 | 1,81307 |
| 8 albastru | laser Ar | | 4727 | 1,52339 | 1,81070 |
| 9 albastru | laser Ar | | 4765 | 1,52310 | 1,80945 |
| 10 albastru | arc Cd | F’ | 4800 | 1,52283 | 1,80834 |
| 11 albastru | arc H | F ($H_\beta$) | $4861 = \lambda_a$ | $n_a = 1{,}52238$ | 1,80645 |
| 12 albastru | laser Ar | | 4880 | 1,52224 | 1,80590 |
| 13 verde | laser Ar | | 4965 | 1,52165 | 1,80347 |
| 14 verde | laser Ar | | 5017 | 1,52130 | 1,80205 |
| 15 verde | laser Ar | | 5145 | 1,52049 | 1,79880 |
| 16 verde | laser Nd | | 5320 | 1,51947 | 1,79480 |
| 17 verde | arc Hg | e | 5461 | 1,51872 | 1,79190 |
| 18 galben | arc He | d ($D_3$) | $5876 = \lambda_g$ | $n_g = 1{,}5168$ | 1,78472 |
| 19 galben | arc Na | D | 5893 | 1,51673 | 1,78446 |
| 20 roșu | laser HeNe | | 6328 | 1,51509 | 1,77862 |
| 21 roșu | arc Cd | C’ | 6438 | 1,51472 | 1,77734 |
| 22 roșu | arc H | C ($H_\alpha$) | $6563 = \lambda_r$ | $n_r = 1{,}51432$ | 1,77599 |
| 23 roșu | laser rubin | | 6943 | 1,51322 | 1,77231 |
| 24 IR | laser rubin | | 7860 | 1,51106 | 1,76559 |
| 25 IR | laser rubin | | 8210 | 1,51037 | 1,76360 |
| 26 IR | laser GaAlAs | | 8300 | 1,51021 | 1,76312 |
| 27 IR | arc Cs | s | 8521 | 1,50981 | 1,76202 |
| 28 IR | laser GaAs | | 9040 | 1,50894 | 1,75971 |
| 29 IR | arc Hg | t | 10140 | 1,50731 | 1,75579 |
| 30 IR | laser Nd | | 10600 | 1,50669 | 1,75444 |
| 31 IR | laser InGaAsP | | 13000 | 1,50371 | 1,74888 |

(*date din Melles Griot, Optics Guide 3, 1985*)

Din tabel și definiția (265) rezultă astfel $V = 64,12$ pentru sticla BK 7 și $V = 25,76$ pentru sticla SF 11. Cu cât este mai mic numărul V, cu atât este mai mare dispersia $\delta n$ a indicelui de refracție. Remarcăm că putem înlocui indicele mediu $n_g$ din ecuația (265) cu orice valoare n din spectrul vizibil, variația maximă a numărului V nedepășind circa 2%.

Tradițional, sticlele optice se împart în două mari categorii și anume ***sticle flint*** (F), cu număr V în intervalul 20-50, și ***sticle crown*** (K), cu număr V în intervalul 50 - 70. Orice sticlă optică comercială are un indicator (***catalog code***), cu două numere, rotunjite la a treia zecimală și anume $(n_g - 1)/10V$. (dar, prin convenție, majorat de o mie de ori !). Astfel, de exemplu, indicatorul sticlelor din tabelul de mai sus este 785/258 pentru sticla flint super-dens SF 11 și 517/641 pentru sticla crown de borosilicat BK 7.

Prin intermediul indicelui de refracție, elementele matricei S, respectiv elementele cardinale ale sistemelor optice, depind de lungimea de undă. Evident, în lumină monocromatică, cum este lumina filtrată de un monocromator sau lumina laser de o singură frecvență, orice obiect are o singură imagine. Dacă însă lumina este policromatică, sistemul optic nu mai formează o singură imagine, ci o multitudine de imagini monocromatice, cu poziții și dimensiuni diferite (fig.67), astfel că imaginea rezultată prin suprapunere are bordura irizată și nu mai este netă. Acest efect supărător, cauzat de dispersia luminii, poartă numele de ***aberație cromatică*** sau ***cromatism***. Putem defini ***aberația cromatică axială*** sau ***de poziție*** și ***aberația cromatică transversală*** sau ***de mărime***.

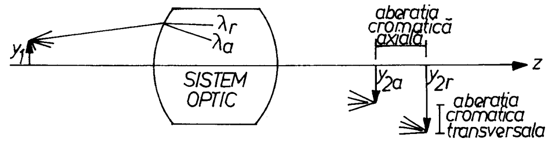



**Fig.67.** Aberații cromatice (axială și transversală).

Aceste aberații pot fi eliminate, mai mult sau mai puțin complet, prin combinarea de lentile care contribuie în sensuri opuse la ele. Să examinăm mai departe această problemă în aproximația paraxială. Astfel, în general, ***acromatizarea perfectă*** a unui sistem optic ***pentru două lungimi de undă*** $\lambda_a$ și $\lambda_r$, implică anularea tuturor variațiilor corespunzătoare ale elementelor matricei S, adică:

$$\frac{\delta S_{11}}{\delta n} = \frac{\delta S_{22}}{\delta n} = \frac{\delta S_{21}}{\delta n} = 0, \tag{267}$$

unde $\delta n = n_a - n_r$. De regulă, acest sistem de ecuații nu este compatibil, astfel că aberațiile cromatice (axială și transversală) nu pot fi eliminate simultan. De aceea, în majoritatea cazurilor practice, trebuie să ne mulțumim cu o ***acromatizare parțială***, în funcție de destinația instrumentului, preferând precizia fie în poziția, fie în mărirea imaginii.

Să considerăm mai întâi cazul simplu al unei lentile subțiri. Conform ecuațiilor (199), (200), numai elementul $S_{21} = -n_1/f$, respectiv convergența

$$\frac{1}{f} = (n-1)\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) \equiv K(n-1), \tag{268}$$

depind de indicele de refracție. Pentru abreviere, în ecuația (268) am notat cu K suma algebrică a curburilor dioptrilor componenți. Evident, o singură lentilă subțire nu poate fi acromatizată deoarece $\delta S_{21}/\delta n = -Kn_1 \neq 0$. Alternativ, prin diferențierea ecuației (268) avem

$$-\frac{\delta f}{f} = \frac{\delta n}{n-1} = \frac{1}{V} > 0, \tag{269}$$

sau

$$\frac{f_r - f_a}{f_g} = \frac{n_a - n_r}{n_g - 1} = \frac{1}{V} > 0. \tag{270}$$

Deci, dispersia axială $f_r - f_a = f_g/V$ a focarelor nu poate fi nulă deoarece întotdeauna V > 0. Aceasta este pozitivă pentru lentile convergente $(f_g > 0)$, cum este arătat în fig.68, și negativă pentru lentile divergente $(f_g < 0)$. Semnul aberației se explică prin forma prismatică a lentilelor convergente sau divergente, acestea devenind mai subțiri, respectiv mai groase, pe măsură ce distanța față de axul optic crește. Extensia spectrului axial al focarelor este prezentată exagerat în fig.68 deoarece, de exemplu, pentru o sticlă crown cu $V = 60$ *avem* $f_r - f_a = f_g/60$. Totodată, remarcăm că putem înlocui distanța focală medie $f_g$ din ecuația (270) cu orice valoare *f* din spectrul vizibil.

Aberația cromatică se remarcă ușor în lumină policromatică prin haloul care înconjoară imaginea reală formată pe un ecran de observare. Astfel, de exemplu, considerând o sursă punctuală de lumină "albă", situată la infinit pe axul optic, în focarul $F_a$ apare un punct albastru înconjurat de un halou degradat spre roșu, iar în focarul $F_r$ apare un punct roșu înconjurat de un halou degradat spre albastru. Cea mai bună imagine "albă" apare într-un plan intermediar ($\Sigma$) sub forma unui disc circular de minimă difuzie (fig.68).

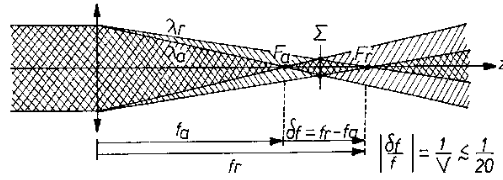



**Fig.68.** Dispersia axială $f_r - f_a$ și cea mai bună imagine "albă" (în planul $\Sigma$).

Spre deosebire de lentila subțire, distanța focală a lentilei groase poate fi acromatizată pentru două lungimi de undă. Pentru aceasta, din ecuația $\delta(1/f)/\delta n = 0$, echivalentă cu $\delta S_{21}/\delta n = 0$, și expresia convergenței lentilei groase, ecuația (193), rezultă condiția

$$g = \frac{n^2}{n^2 - 1}(r_1 - r_2) \quad . \tag{271}$$

Cum grosimea g este esențialmente pozitivă, această condiție poate fi îndeplinită numai dacă $r_1 > r_2$. Din nefericire, celelalte două condiții din sistemul (267) și, în consecință, acromatizarea punctelor cardinale, ecuația (195), nu mai pot fi simultan realizate.

Să analizăm mai în detaliu condițiile de acromatizare ale dubletului de lentile subțiri. Vom începe cu condiția de acromatizare a elementului $S_{21}$, respectiv a convergenței date de formula lui Gullstrand

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \frac{d}{f_1 f_2}. \tag{210}$$

Din ecuația $\delta(1/f)/\delta n = 0$ rezultă imediat condiția

$$d = \frac{f_1 V_1 + f_2 V_2}{V_1 + V_2}, \qquad (272)$$

unde numerele $V_1, V_2$ corespund, în general, la sticle diferite, adică

$$V_1 = \frac{n_{g_1} - 1}{n_{a_1} - n_{r_1}}, \qquad V_2 = \frac{n_{g_2} - 1}{n_{a_2} - n_{r_2}}. \qquad (273)$$

În cazul particular în care lentilele dubletului sunt confecționate din aceeași sticlă, adică $V_1 = V_2$, ecuația (272) devine

$$d = \frac{f_1 + f_2}{2}, \qquad (274)$$

condiție de care se ține seama în construcția ocularelor (vezi paragraful 2.5). Ca și în cazul lentilei groase, această acromatizare este doar parțială întrucât nu poate fi simultan compensată și dispersia în pozițiile punctelor cardinale. Cu toate acestea, acromatizarea distanței focale f a sistemului implică și pe aceea a grosismentului $G = 1/4f$ (ecuația (206)). Această acromatizare aparentă este cauzată de faptul că imaginile de diverse culori, deși distincte între ele (ca poziție și mărime), apar pentru ochi sub același unghi vizual $\theta_2$, astfel că, din perspectivă, apar finalmente suprapuse pe retină.

O metodă importantă de acromatizare a dubletului constă în alipirea lentilelor subțiri, confecționate din sticle diferite, obținându-se ceea ce se numește ***dubletul acromat de contact***. În acest caz $d = 0$ și $V_1 \neq V_2$, astfel că ecuațiile (210), (272) devin

$$\frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} = \frac{1}{f}, \qquad (275)$$

$$f_1 V_1 + f_2 V_2 = 0. \qquad (276)$$

Remarcăm că pentru dubletul de contact $S_{11} = S_{22} = 1$, conform ecuației (201) sau ecuației (209) pentru $d = 0$, astfel că planele principale nu prezintă dispersie și coincid cu planul tangent la vertexul comun al dioptrilor componenți, iar planele focale sunt fixate de distanța focală acromatizată prin condiția (276). În concluzie, acromatizarea distanței focale reprezintă ***acromatizarea perfectă***, de poziție și de mărire, a dubletului de contact. Din ecuațiile (275), (276) observăm că, pentru ca dubletul acromat să nu reprezinte cazul trivial al convergenței nule, $1/f = 0$, ceea ce implică $f_1 = -f_2$, este necesar ca $V_1 \neq V_2$, adică cele două lentile componente trebuie să fie confecționate din sticle diferite. De asemenea, deoarece $V_1, V_2 > 0$, rezultă că cele două distanțe focale $f_1, f_2$ trebuie să aibă semne diferite, adică o lentilă trebuie să fie convergentă iar cealaltă divergentă. Este interesant de menționat că, din măsurătorile imprecise de indici de refracție din timpul său, practic inevitabile înainte de descoperirea liniilor spectrale, Newton a tras concluzia ***eronată*** că numărul V este același pentru toate sticlele, deci că aberația cromatică nu poate fi în principiu eliminată (cu excepția cazului trivial $f_1 = -f_2$). Din acest motiv el s-a concentrat, cu succes, spre construcția

telescopului de reflexie, deoarece sistemele pur reflectante nu prezintă aberații cromatice (legea de reflexie nu conține indicele de refracție). Primul dublet acromat a fost patentat de opticianul londonez John Dollond (1758) și a avut un impact decisiv în perfecționarea instrumentelor optice de refracție.

Rezolvând ecuațiile (275), (276) pentru convergențele lentilelor componente, obținem relațiile necesare pentru calculul dubletului acromat de contact, și anume

$$\frac{1}{f_1} \equiv (n_{g_1} - 1)\left(\frac{1}{r_{11}} - \frac{1}{r_{12}}\right) = \frac{1}{f} \cdot \frac{V_1}{V_1 - V_2}, \tag{277}$$

$$\frac{1}{f_2} \equiv (n_{g_2} - 1)\left(\frac{1}{r_{21}} - \frac{1}{r_{22}}\right) = \frac{1}{f} \cdot \frac{V_2}{V_2 - V_1}. \tag{278}$$

Astfel, impunând o anumită convergență $1/f$ a dubletului și alegând sticlele optice, adică $n_{g_1}, n_{g_2}, V_1, V_2,$ din ultimele două expresii putem calcula convergențele $1/f_1, 1/f_2$ ale lentilelor componente. Pentru a evita valori prea mici pentru $f_1, f_2$, respectiv pentru razele de curbură ale lentilelor, este necesar ca diferența $|V_1 - V_2|$ să fie suficient de mare. Să ilustrăm această procedură prin calculul unui dublet acromat de contact cu f = 0,5 m, ale cărui lentile sunt confecționate din sticla crown BK 1, cu indicatorul 510/635, respectiv din sticla flint F2, cu indicatorul 620/364. Introducând valorile $1/f = 2m^{-1}$ și $V_1 = 63,5,\ V_2 = 36,4,$ din ultimele două expresii rezultă $1/f_1 = 4,686\,m^{-1}$ și $1/f_2 = -2,686\,m^{-1}$. Evident, suma convergențelor lentilelor componente trebuie să fie egală cu convergența dubletului, ecuația (275).

În general, suprafețele adiacente ale dubletului de contact pot să nu aibă aceeași rază de curbură, contactul realizându-se fie numai la centru, fie numai la margine. Pentru $f_1, f_2, n_{g_1}, n_{g_2}$ date, primele expresii (277), (278) reprezintă două relații între patru raze de curbură, astfel că două raze de curbură pot fi alese în mod arbitrar. În practică, această mare libertate este folosită pentru a minimiza aberațiile geometrice de sfericitate și de coma, profitând de faptul că efectele acestora pentru lentile convergente și divergente sunt de semne opuse.

Un dublet acromat simplu este ***acromatul Fraunhofer*** (fig.69) format dintr-o lentilă echi-convexă $(r_{12} = -r_{11})$ de crown, în contact complet $(r_{12} = r_{21})$ cu o lentilă practic plano-concavă, de flint. De regulă, acest dublet se cimentează cu un adeziv transparent (de exemplu cu poliester). Folosind datele numerice din exemplul de mai sus $(1/f_1 = 4,686\,m^{-1}$, $1/f_2 = -2,686\,m^{-1}, n_{g_1} = 1,510, n_{g_2} = 1,620)$ și relațiile impuse dintre razele de curbură, din primele expresii (277), (278) rezultă $r_{11} = -r_{12} = -r_{21} = 21,8\,cm$ și $r_{22} = -381,9\,cm.$

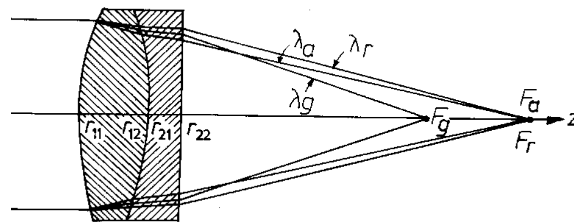



**Fig.69.** Acromatul lui Fraunhofer.

În general, se recomandă ca lentila frontală să fie cea din sticlă crown datorită rezistenței sale mai bune la uzură.

Până acum am considerat numai condițiile de acromatizare pentru două lungimi de undă $\lambda_a$, $\lambda_r$. În cazul dubletului de contact aceasta implică egalitatea distanțelor focale corespunzătoare $f_a = f_r$, și coincidența focarelor $F_a$, $F_r$ (fig.69). Însă, pentru alte lungimi de undă $\lambda_x$, distanța focală corespunzătoare $f_x$ se abate de la valoarea $f_a = f_r$ impusă prin acromatizare, reprezentând așa numitul ***spectru secundar*** sau ***aberația cromatică reziduală***. Pentru a determina distribuția focarelor $F_x$ în acest spectru, să diferențiem ecuația (275) și să folosim ecuația (269) pentru lentilele componente, adică

$$-\frac{\delta f}{f^2} = -\frac{\delta f_1}{f_1^2} - \frac{\delta f_2}{f_2^2} = \frac{1}{f_1} \cdot \frac{\delta n_1}{n_1 - 1} + \frac{1}{f_2} \cdot \frac{\delta n_2}{n_2 - 1}, \tag{279}$$

unde, de data aceasta, vom considera $\delta f = f_a - f_x$ și $\delta n = n_a - n_x$. Deci

$$\frac{f_x - f_a}{f^2} = \frac{1}{f_1} \cdot \frac{n_{a_1} - n_{x_1}}{n_{a_1} - 1} + \frac{1}{f_2} \cdot \frac{n_{a_2} - n_{x_2}}{n_{a_2} - 1} = \frac{1}{f_1 V_{x_1}} + \frac{1}{f_2 V_{x_2}} = \frac{P_{x1}}{f_1 V_1} + \frac{P_{x2}}{f_2 V_2}, \tag{280}$$

unde, pentru conveniență, am introdus ***numărul lui Abbe modificat***

$$V_x \stackrel{def}{=} \frac{n_a - 1}{n_a - n_x} \quad , \tag{281}$$

respectiv ***dispersia parțială relativă***

$$P_x \stackrel{def}{=} \frac{V}{V_x} = \frac{n_a - n_x}{n_a - n_r} \; . \tag{282}$$

Cu ajutorul ecuațiilor (277), (278), ultima expresie din ecuația (280) se mai scrie

$$\frac{f_x - f_a}{f} = \frac{P_{x_1} - P_{x_2}}{V_1 - V_2} \tag{283}$$

și reprezintă ***ecuația spectrului secundar***. Această ecuație permite calculul diferenței relative a distanței focale $f_x$ față de distanța focală de acromatizare $f_a = f_r$, cu ajutorul dispersiilor parțiale $P_{x_1}, P_{x_2}$, în funcție de lungimea de undă $\lambda_x$. Figura 70 ilustrează acest calcul pentru dubletul acromat de contact confecționat din sticlele crown BK 7 (lentila 1) și flint SF 11 (lentila 2) folosind indicii de refracție listați în tabelul de la începutul acestei secțiuni. Spectrul secundar apare repliat asupra lui însuși, având o distanță focală minimă $f_{\min}$ corespunzătoare radiației de lungime de undă $\lambda_m$, din vecinătatea liniei galbene $D_3$ $(\lambda_g)$ . Cu excepția lui $f_{\min}$, focarele corespunzătoare diverselor radiații monocromatice coincid două câte două. Remarcabil este faptul că abaterea focarelor în domeniul vizibil de la valoarea de acromatizare $f_a = f_r$ poate fi neglijată în multe aplicații. Într-adevăr, din fig.70 rezultă, de exemplu, că $|f_{\min} - f_a|/f = 0,64 \cdot 10^{-3} \approx 1/1600$ sau $|f_g - f_a|/f \approx 1/1800$ (abaterea minimă în domeniul vizibil a dubletelor acromatice comerciale este de circa 1/2000). Având

în vedere acest rezultat, este evident că extensia spectrului secundar sugerată de fig.69 este mult exagerată. Pentru comparație cu această performanță a dubletului acromat, reamintim că extensia relativă a spectrului focarelor unei singure lentile este $(f_r - f_a)/f_g = 1/V$, ecuația (270), adică o valoare de câteva zeci de ori mai mare.

Conform ecuației (283), reducerea spectrului secundar se poate realiza, în principiu, prin alegerea unei perechi de sticle cu diferența $P_{x_1} - P_{x_2}$ a dispersiilor parțiale cât mai mică și/sau cu diferența $V_1 - V_2$ a numerelor Abbe cât mai mare. Din nefericire, prima metodă se dovedește impracticabilă, deoarece sticlele optice existente par să aibă diferența valorilor P aproximativ proporțională cu diferența valorilor V, astfel că alegerea sticlelor nu influențează în mod semnificativ extensia spectrului secundar. Mai utilă este a doua metodă, constând în asocierea unei sticle cu număr V mic cu cristalul de fluorină, care are un număr V foarte mare ($V = 95,4$). Această ultimă cale, cum am arătat (vezi ecuațiile (277) și (278)), mai prezintă și avantajul suplimentar că distanțele focale $f_1, f_2$, deci și razele de curbură ale lentilelor, sunt relativ mari, astfel că unghiurile de refracție și aberațiile geometrice sunt relativ mici. Prin folosirea ambelor metode indicate mai sus, dubletul de sticlă și fluorină poate fi acromatizat ***pentru trei lungimi de undă***, $\lambda_a, \lambda_r, \lambda_x$, $(f_a = f_r = f_x)$.

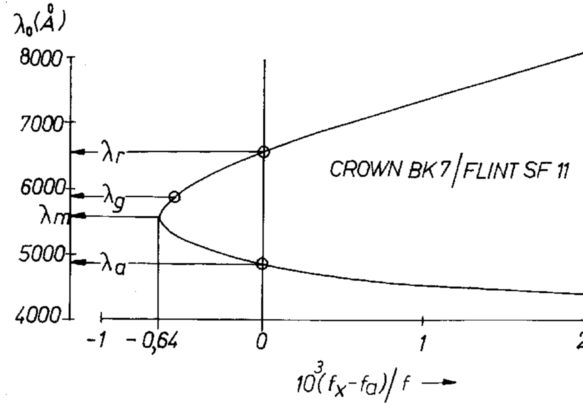


**Fig.70.** O reprezentare analitică a ecuației spectrului secundar pentru dubletul crown BK7/ flint SF 11

Mult mai ușor se acromatizează, ***pentru trei lungimi de undă***, $\lambda_a, \lambda_r, \lambda_x$, sau ***pentru patru lungimi de undă*** $\lambda_a, \lambda_r, \lambda_x, \lambda_y$, ***tripletul de lentile subțiri alipite***, realizat din sticle diferite. În ultimul caz sistemul poartă numele de ***superacromat*** și permite, practic, anihilarea completă a spectrului secundar în tot domeniul vizibil, infraroșul apropiat și ultravioletul apropiat. În încheiere, să determinăm condițiile de acromatizare pentru ***tripletul superacromat***. Pornim de la expresia convergenței

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} + \frac{1}{f_3} \quad , \tag{284}$$

și impunem egalitățile $f_a = f_r = f_x = f_y$. Prin diferențierea ecuației (284) avem

$$\frac{\delta f_1}{f_1^2} + \frac{\delta f_2}{f_2^2} + \frac{\delta f_3}{f_3^2} = 0 \tag{285}$$

sau, folosind ecuația (269) pentru lentilele componente,

$$\frac{1}{f_1} \cdot \frac{\delta n_1}{n_1 - 1} + \frac{1}{f_2} \cdot \frac{\delta n_2}{n_2 - 1} + \frac{1}{f_3} \cdot \frac{\delta n_3}{n_3 - 1} = 0. \tag{286}$$

Pentru $\delta n = n_a - n_r$ obținem

$$\frac{1}{f_1 V_1} + \frac{1}{f_2 V_2} + \frac{1}{f_3 V_3} = 0, \tag{287}$$

ecuație care generalizează, pentru triplet, condiția (276). În mod similar, pentru $\delta n = n_a - n_x$, avem

$$\begin{cases} \frac{1}{f_1 V_{x_1}} + \frac{1}{f_2 V_{x_2}} + \frac{1}{f_3 V_{x_3}} = 0, \\ \frac{P_{x_1}}{f_1 V_1} + \frac{P_{x_2}}{f_2 V_2} + \frac{P_{x_3}}{f_3 V_3} = 0, \end{cases} \tag{288}$$

iar pentru $\delta n = n_a - n_y$,

$$\begin{cases} \frac{1}{f_1 V_{y_1}} + \frac{1}{f_2 V_{y_2}} + \frac{1}{f_3 V_{y_3}} = 0, \\ \frac{P_{y_1}}{f_1 V_1} + \frac{P_{y_2}}{f_2 V_2} + \frac{P_{y_3}}{f_3 V_3} = 0. \end{cases} \tag{289}$$

Condițiile (287), (288), (289) pot fi simultan satisfăcute de orice triplet de sticle care, în graficul $(P_x, P_y)$ se găsesc pe o linie dreaptă, adică dacă

$$P_{y_1} = aP_{x_1} + b, \quad P_{y_2} = aP_{x_2} + b, \quad P_{y_3} = aP_{x_3} + b, \tag{290}$$

unde a, b sunt constante. Multe triplete din sticlele actuale satisfac această condiție.

## *§ 2. 8. Aberații geometrice*

Până acum am considerat sistemele optice centrate în aproximația paraxială, astfel că fiecărui punct obiect $Q_1$ îi corespunde câte un punct conjugat imagine $Q_2$. Cu alte cuvinte, în domeniul paraxial, sistemul optic transformă un fascicul conic de raze cu vârful în $Q_1$ într-un fascicul conic de raze cu vârful în $Q_2$, respectiv o undă sferică cu centrul în $Q_1$, într-o undă sferică cu centrul în $Q_2$. Dacă, însă, fasciculul de raze provenit din punctul obiect $Q_1$ nu mai este paraxial, razele emergente corespunzătoare nu mai converg către imaginea punctuală paraxială (gaussiană) $Q_2$ ci înțeapă planul

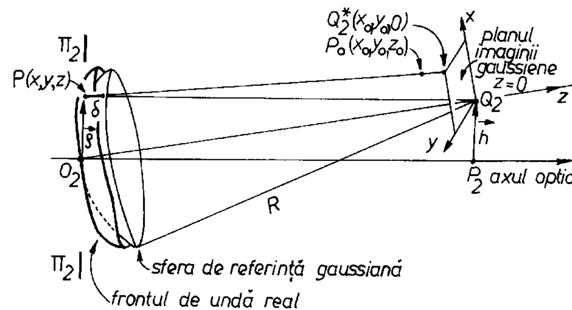


**Fig.71.** Sfera de referință gaussiană și frontul de undă real.

imaginii gaussiene în diverse puncte $Q_2^*$, respectiv unda emergentă se abate de la forma sferică ideală (fig.71). Aceste abateri de la imaginea punctuală ideală, cauzate de razele extra-paraxiale, poartă numele de ***aberații geometrice*** sau ***aberații monocromatice***, deoarece apar chiar dacă lumina este perfect monocromatică.

Datorită aberațiilor geometrice, oricărui punct obiect $Q_1$ îi corespunde în planul imaginii gaussiene $Q_2$ o pată difuză de lumină, limitată de o ***curbă de aberație*** determinată de razele marginale. În general, abaterile geometrice de la imaginea paraxială $Q_2$ pot fi caracterizate cantitativ prin vectorii $\overrightarrow{Q_2 Q_2^*}$ de ***aberație a razei***, respectiv de diferența de drum $\delta$, denumită ***aberația undei***, dintre o ***suprafață de undă reală (deformată)*** și o ***sferă de referință gaussiană***, cu centrul în punctul imagine paraxială $Q_2$. Pentru a fixa ideile, să considerăm suprafața de undă reală și sfera de referință gaussiană care trec prin centrul $O_2$ al pupilei de ieșire $\Pi_2$ (fig.71). În continuare este avantajos să considerăm un sistem de coordonate cartezian $Q_2xyz$, cu originea în $Q_2$ și cu axa $Q_2z$ orientată pe direcția $O_2Q_2$, astfel că ecuația sferei de referință se scrie simplu

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2, \qquad (291)$$

unde $R = |O_2Q_2|$. În continuare, vom considera că suprafața de undă reală se abate de la această sferă, astfel că are ecuația

$$x^2 + y^2 + z^2 = (R + \delta)^2 \approx R^2 + 2R\delta, \quad (\delta << R) \quad , \qquad (292)$$

unde $\delta = \delta(P, Q_2) = \delta(\vec{\rho}, \vec{h})$ reprezintă aberația undei în punctul $P(x, y, z) = P(\vec{\rho}, z \approx R)$ față de sfera de referință cu centrul în punctul imagine gaussiană $Q_2(0,0,0) = Q_2(\vec{h})$. Remarcăm că variabila $\vec{\rho}$ determină punctul de intersecție al razelor emergente cu planul pupilei de ieșire iar variabila $\vec{h}$ este o măsură a înclinării razei paraxiale centrale față de axul optic. Întrucât această înclinare trebuie să fie mică, planul $xQ_2y$ reprezintă practic planul imaginii gaussiene. În plus, vom considera $Q_2x$ practic paralel cu $\vec{h}$ (fig.71).

În cele ce urmează vom ține cont de faptul că sistemul optic considerat are simetrie axială, astfel că aberația undei $\delta(\vec{h}, \vec{\rho})$ poate să depindă, în general, numai de variabilele produse scalare $\vec{h}^2, \vec{\rho}^{\,2}$ și $\vec{h} \cdot \vec{\rho}$, care sunt invariante față de rotația în jurul axului optic, adică $\delta = \delta(h^2, \rho^2, h\rho\cos\theta)$, unde $\theta$ este unghiul dintre vectorii $\vec{\rho}$ și $\vec{h}$. În general, pentru a evidenția ***aberațiile geometrice primare (aberațiile Seidel)***, este suficient să dezvoltăm în serie aberația undei $\delta$ față de invarianții de rotație până la termeni de ordinul al doilea, adică

$$\delta(h^2, \rho^2, h\rho\cos\theta) = a_0 + b_1 h^2 + b_2\rho^2 + b_3 h\rho\cos\theta + \frac{1}{2}[c_{11}h^4 +$$

$$+ c_{12}h^2\rho^2 + + c_{13}h^2 \cdot h\rho\cos\theta + + c_{21}\rho^2 \cdot h^2 + + c_{22}\rho^4 +$$

$$+ c_{23}\rho^2 \cdot h\rho\cos\theta + + c_{31}h\rho\cos\theta \cdot h^2 + c_{32}h\rho\cos\theta \cdot \rho^2 +$$

$$+ c_{33}(h\rho\cos\theta)^2 \Big] + ..., \qquad (293)$$

și să grupăm apoi coeficienții termenilor identici. Acești coeficienți sunt constante a căror valoare depinde de structura sistemului optic considerat și de poziția planului obiect.

Orice rază de lumină emergentă $PP_0$ satisface ecuația normalei la suprafața de undă reală, adică

$$\frac{x-x_0}{\partial F/\partial x} = \frac{y-y_0}{\partial F/\partial y} = \frac{z-z_0}{\partial F/\partial z}, \tag{294}$$

unde, conform ecuației (292),

$$F(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - R^2 - 2R\delta = 0. \tag{295}$$

Ținând cont că pentru $Q_2(\vec{h})$ dat, $\delta = \delta(\vec{\rho}) = \delta(x,y)$, din ecuația (294) rezultă

$$\frac{x-x_0}{x - R\dfrac{\partial\delta}{\partial x}} = \frac{y-y_0}{y - R\dfrac{\partial\delta}{\partial y}} = \frac{z-z_0}{z}, \tag{296}$$

sau

$$\begin{cases} x - x_0 = (1 - \frac{z_0}{z})\left(x - R\dfrac{\partial\delta}{\partial x}\right), \\ y - y_0 = (1 - \frac{z_0}{z})\left(y - R\dfrac{\partial\delta}{\partial y}\right). \end{cases} \tag{297}$$

În continuare, vom considera deplasarea (defocalizarea) $z_0$ față de planul $z = 0$ al imaginii gaussiene ca foarte mică, astfel că vom neglija produsul $z_0 \cdot \delta$. De asemenea, vom aproxima peste tot $z \approx R$ întrucât distanțele de-a lungul axei optice până la suprafața de undă din dreptul pupilei de ieșire sunt practic egale cu raza sferei de referință.

În aceste condiții, ecuațiile (297) devin

$$\begin{cases} x_0 = \frac{z_0}{R}x + R\dfrac{\partial\delta}{\partial x}, \\ y_0 = \frac{z_0}{R}y + R\dfrac{\partial\delta}{\partial y}. \end{cases} \tag{298}$$

Evident, în planul imaginii gaussiene ($z_0 = 0$), avem

$$\begin{cases} x_0 = R\dfrac{\partial\delta}{\partial x}, \\ y_0 = R\dfrac{\partial\delta}{\partial y}, \end{cases} \tag{299}$$

și reprezintă componentele vectorului de aberație a razei, $\overrightarrow{Q_2Q_2^*}$.

Întrucât expresia lui $\delta$, ecuația (293), este dată în coordonate polare, vom folosi transformările

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta, \\ y = \rho\sin\theta, \end{cases} \qquad \begin{cases} \rho = (x^2+y^2)^{1/2}, \\ tg\theta = y/x, \end{cases} \tag{300}$$

astfel că

$$\begin{cases} \frac{\partial\delta}{\partial x} = \frac{\partial\delta}{\partial\rho}\frac{\partial\rho}{\partial x} + \frac{\partial\delta}{\partial\theta}\frac{\partial\theta}{\partial x} = \cos\theta\frac{\partial\delta}{\partial\rho} - \frac{\sin\theta}{\rho}\frac{\partial\delta}{\partial\theta}, \\ \frac{\partial\delta}{\partial y} = \frac{\partial\delta}{\partial\rho}\frac{\partial\rho}{\partial y} + \frac{\partial\delta}{\partial\theta}\frac{\partial\theta}{\partial y} = \sin\theta\frac{\partial\delta}{\partial\rho} + \frac{\cos\theta}{\rho}\frac{\partial\delta}{\partial\theta}, \end{cases} \tag{301}$$

și relațiile (298) se scriu

$$\begin{cases} x_0 = \frac{z_0}{R}\rho\cos\theta + R\left(\cos\theta\frac{\partial\delta}{\partial\rho} - \frac{\sin\theta}{\rho}\frac{\partial\delta}{\partial\theta}\right), \\ y_0 = \frac{z_0}{R}\rho\sin\theta + R\left(\sin\theta\frac{\partial\delta}{\partial\rho} + \frac{\cos\theta}{\rho}\frac{\partial\delta}{\partial\theta}\right). \end{cases} \tag{302}$$

Efectuând derivările și grupând constantele, din ecuațiile (293), (302) rezultă finalmente

$$\begin{cases} x_0 = \frac{z_0}{R}\rho\cos\theta + 2Rb_2\rho\cos\theta + Rb_3h + B\rho^3\cos\theta - Fh\rho^2(2+\cos 2\theta) + \\ \qquad +(2C+D)h^2\rho\cos\theta - Eh^3, \\ y_0 = \frac{z_0}{R}\rho\sin\theta + 2Rb_2\rho\sin\theta + B\rho^3\sin\theta - Fh\rho^2\sin 2\theta + Dh^2\rho\sin\theta. \end{cases} \tag{303}$$

unde am notat $B = 2Rc_{22}$, $F = -R(c_{23}+c_{32})/2$, $C = Rc_{33}/2$, $D = R(c_{12}+c_{21})$, $E = -R(c_{13}+c_{31})/2$.

Amintim că termenii cu $z_0$ provin din defocalizarea arbitrară introdusă de noi față de planul imaginii gaussiene ($z_0 = 0$).

Să discutăm mai întâi semnificația termenilor de ordinul întâi în ρ și h, care apar datorită coeficienților b. Astfel, în ceea ce privește coeficientul $b_2$, în planul $z_0 = 0$ rezultă

$$\begin{cases} x_0 = 2Rb_2\rho\cos\theta, \\ y_0 = 2Rb_2\rho\sin\theta, \end{cases}$$

adică cercul

$$x_0^2 + y_0^2 = (2Rb_2\rho)^2.$$

Pentru ca această pată de lumină circulară să fie redusă la un punct, deplasăm planul ideal până când $x_0 = y_0 = 0$, adică în poziția $z_0 = -2b_2R^2$, care poate fi interpretată fie ca o corecție a erorii longitudinale de focalizare, fie, dacă $b_2$ depinde de λ, ca o ***aberație cromatică axială***. În privința coeficientului $b_3$, acesta reprezintă, în planul $z_0 = 0$, o deplasare transversală a punctului de focalizare cu $x_0 = Rb_3h$ și poate fi interpretată, de

asemenea, fie ca o corecție a erorii laterale de focalizare, fie, dacă $b_3$ depinde de $\lambda$, ca o ***aberație cromatică transversală***.

Aberațiile geometrice propriu-zise apar în ecuațiile (303) prin termenii de ordinul al treilea în $\rho$ și h, termeni identificați prin ***coeficienții lui Seidel*** B, F, C, D, E (notație clasică). Din motive de clasificare, vom analiza contribuția individuală a fiecărui termen, neglijând contribuția celorlalți termeni. În acest fel, rezultă ***cinci tipuri de aberații de ordinul al treilea*** și anume: ***aberația sferică*** $(B \neq 0)$, ***coma*** $(F \neq 0)$, ***astigmatismul*** $(C \neq 0)$, ***curbura câmpului*** $(D \neq 0)$, și ***distorsiunea*** $(E \neq 0)$.

***Aberația sferică*** $(B \neq 0)$ este singura aberație de ordinul al treilea care există pe axul optic $(h = 0)$. Să considerăm, pentru început, planul ideal $z_0 = 0$ astfel că

$$\begin{cases} x_0 = B\rho^3 \cos\theta, \\ y_0 = B\rho^3 \sin\theta, \end{cases}$$

de unde, prin eliminarea lui $\theta$, obținem

$$x_0^2 + y_0^2 = (B\rho^3)^2. \tag{304}$$

În consecință, curba de aberație este un cerc cu centrul în punctul imagine paraxială $Q_2$ și cu raza egală cu $B\rho^3$, reprezentând ***aberația sferică transversală*** (fig.72). Orice punct obiect are deci ca imagine o pată de difuzie circulară cu raza proporțională cu cubul razei pupilei de ieșire. Desigur, această aberație nu deranjează ochiul dacă diametrul $2B\rho^3$ corespunde unui unghi de vedere mai mic decât rezoluția unghiulară $(\gamma_1)_{\min}^{ochi} \approx 1'$.

**Fig.72.** Aberația sferică (axială și transversală).

O rază oarecare care iese la distanța $\rho$ de centrul pupilei de ieșire, va intersecta axa $O_2z$, în general, în alt punct decât punctul $Q_2$ de convergență a razelor paraxiale. Punând condiția de intersecție $x_0 = y_0 = 0$ într-un plan $z_0 \neq 0$, din ecuațiile (303) avem

$$\begin{cases} x_0 = \frac{z_0}{R}\rho\cos\theta + B\rho^3\cos\theta = 0, \\ y_0 = \frac{z_0}{R}\rho\sin\theta + B\rho^3\sin\theta = 0, \end{cases}$$

de unde rezultă ***aberația sferică axială*** (vezi fig.72)

$$z_0 = -BR\rho^2. \tag{305}$$

Semnul acestei aberații poate fi pozitiv sau negativ. Astfel, de exemplu, pentru o lentilă convergentă $z_0 < 0$ iar pentru o lentilă divergentă $z_0 > 0$, de unde rezultă posibilitatea reducerii aberației sferice prin combinarea acestora. În general, conform ecuațiilor (304), (305), aberația sferică depinde numai de variabila $\rho$, care este o măsură a aperturii unghiulare $\gamma$, de unde și denumirea de ***aberație de apertură***.

Toate celelalte aberații geometrice prezise de ecuațiile (303) sunt datorate fasciculelor de raze înclinate față de axul optic ($h \neq 0$). Ele afectează deci numai imaginile punctelor extraaxiale și sunt de ordinul întâi, al doilea și al treilea în variabila h, care este o măsură a câmpului unghiular de vedere, $\theta$. Aceste aberații ale fasciculelor înclinate pot fi cuprinse în denumirea de ***aberații de câmp***. Dintre acestea vom considera mai întâi ***coma*** ($F \neq 0$). În acest caz, în planul ideal $z_0 = 0$, avem

$$x_0 = -Fh\rho^2(2+\cos 2\theta), \qquad y_0 = -Fh\rho^2 \sin 2\theta,$$

de unde, prin eliminarea unghiului $2\theta$, rezultă ecuația curbei de aberație

$$(x_0 + 2Fh\rho^2)^2 + y_0^2 = (Fh\rho^2)^2, \qquad (306)$$

adică ecuația unui cerc cu centrul $(-2Fh\rho^2, 0)$ și raza $Fh\rho^2$. În consecință, datorită aberației comatice, razele de lumină care ies printr-un inel de rază $\rho$ al pupilei de ieșire formează un cerc situat în planul imaginii gaussiene, deasupra sau dedesubtul punctului $Q_2$, conform semnului coeficientului F (fig.73). Suprapunerea acestor cercuri, corespunzătoare întregii suprafețe a pupilei de ieșire, formează imaginea unui punct obiect în acest plan. Imaginea astfel obținută are o formă alungită, asemenea cozii unei comete, de unde și numele de coma.

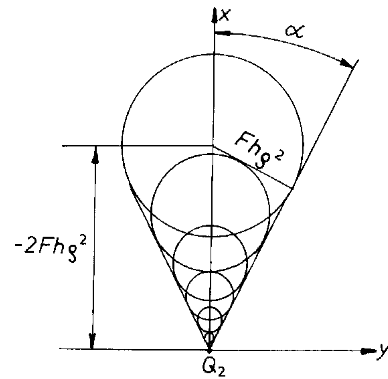



**Fig.73.** Coma.

Remarcăm că, datorită dependenței coordonatelor $x_0$ și $y_0$ de unghiul $2\theta$, o rotație pe cercul $\rho = const.$ din planul pupilei de ieșire conduce la o rotație dublă pe cercul din planul imaginii gaussiene. De asemenea, cum rezultă din fig.73, înfășurătoarele cercurilor din planul imaginii gaussiene reprezintă două segmente de dreaptă care se intersectează în punctul imagine paraxială $Q_2$ sub unghiul $2\alpha$ unde

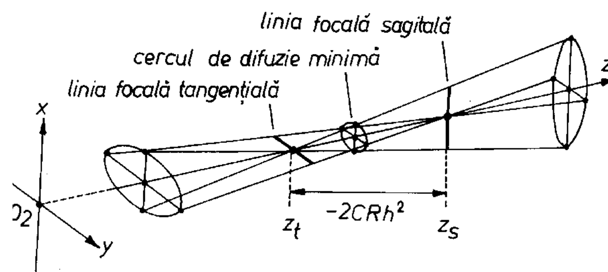



**Fig.74.** Astigmatismul și cercul de minimă difuzie.

$$\alpha = \arcsin(Fh\rho^2/2Fh\rho^2) = \arcsin(1/2) = 30^0.$$

Spre deosebire de coma, care împrăștie imaginea unui punct într-un plan perpendicular pe axul optic (fig.73), astigmatismul o împrăștie în lungul axului optic (fig.74).

În continuare vom trata împreună ***astigmatismul*** $(C \neq 0)$ și ***curbura câmpului*** $(D \neq 0)$ întrucât apar combinate. Considerând aceste aberații într-un plan de intercepție a razelor $z_0 = const.$, din ecuațiile (303) avem

$$\begin{cases} x_0 = \frac{z_0}{R}\rho\cos\theta + (2C+D)h^2\rho\cos\theta, \\ y_0 = \frac{z_0}{R}\rho\sin\theta + Dh^2\rho\sin\theta, \end{cases}$$

de unde, eliminând unghiul $\theta$, obținem ecuația curbei de aberație

$$\frac{x_0^2}{\left[\frac{z_0}{R}\rho + (2C+Dh^2\rho)\right]^2} + \frac{y_0^2}{\left[\frac{z_0}{R}\rho + Dh^2\rho\right]^2} = 1. \qquad (307)$$

Imaginea unui punct obiect extra-axial $Q_1$ apare deci ca o pată de lumină limitată de elipsa dată de ecuația (307), centrată pe axul $O_2z$ și cu axele paralele cu axele de coordonate $O_2x$ și $O_2y$ (fig.74). Deplasând planul $z_0 = const.$, imaginea rămâne eliptică dar forma și dimensiunile ei se modifică. Pentru două poziții ale planului, elipsa degenerează în segmente rectilinii (linii focale), dintre care una este paralelă cu $O_2x$ iar cealaltă este paralelă cu $O_2y$. Astfel, anulând pe rând semiaxele elipsei din ecuația (307), obținem poziția $z_0 = z_s$ a planului cu ***linia focală sagitală***, formată de razele ecuatoriale, și poziția $z_0 = z_t$ a planului cu ***linia focală tangențială***, formată de razele meridionale*, și anume

$$z_s = -(2C+D)Rh^2, \qquad z_t = -DRh^2. \qquad (308)$$

Diferența $z_s - z_t = -2CRh^2$ reprezintă o măsură a astigmetismului (C) pentru punctul obiect $Q_1$ considerat (cu R, h date). Pentru $z_0 = (z_s + z_t)/2$ se obține cea mai mare constrângere a razelor de lumină într-un disc circular, denumit ***cerc de minimă difuzie*** (confuzie) sau pseudo-focar (fig.74).

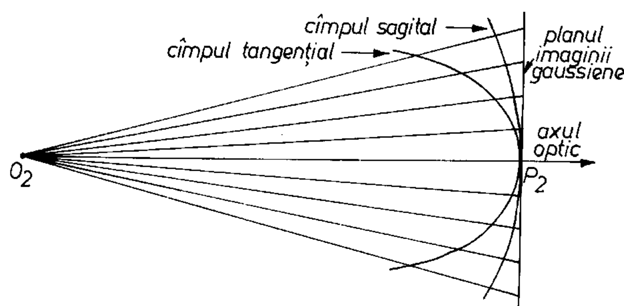
Să considerăm mai departe o linie dreaptă normală pe axul optic în punctul obiect $P_1$. Fiecărui punct de pe această dreaptă îi corespunde ca imagine o pereche de linii focale. Prin rotație în jurul axului optic obținem un obiect plan transversal și imaginea sa, reprezentată de o suprafață curbă, înfășurătoare a liniilor focale, denumită ***caustică***. Conform ecuațiilor (308), această suprafață are două pânze și anume ***câmpul sagital*** (locul geomeric al pozițiilor $z_s$) și ***câmpul tangențial*** (locul geometric al pozițiilor $z_t$), care au forma unor paraboloizi de revoluție cu vertexul comun în punctul imagine paraxială $P_2$ (fig.75). Această

---

* Planul meridional este definit de punctul obiect $Q_1$ și axul optic.

abatere de la planul imaginii gaussiene poartă numele de ***curbura câmpului*** sau ***curbura Petzval***.

Ultima aberație de ordinul al treilea este ***distorsiunea*** ($E \neq 0$). Conform ecuațiilor (303), în planul imaginii gaussiene $z_0 = 0$ avem




$$x_0 = -Eh^3, \quad y_0 = 0 .$$

**Fig.75.** Curbura câmpului (Petzval).

Fiind independentă de $\rho$ și $\theta$, distorsiunea nu mai determină împrăștierea luminii în jurul poziției imaginii ideale $Q_2$, ci doar deplasarea transversală a acesteia în alt punct cu o cantitate proporțională cu $h^3$. Imaginea unui obiect extins spațial rămâne clară, dar deformată. Excepție fac numai dreptele din planul obiect care intersectează axul optic. Toate celelalte drepte care nu intersectează axul optic au ca imagine curbe și anume cu convexitatea, dacă E < 0, respectiv cu concavitatea, dacă E > 0, spre axul optic. Aceste distorsiuni în formă de "pernă", respectiv de "butoi", se evidențiază ușor cu ajutorul unei figuri simple, de extindere finită, cum este rețeaua rectangulară (fig.76). Distorsiunea deranjează dacă este nevoie de măsurători precise extra-axiale.

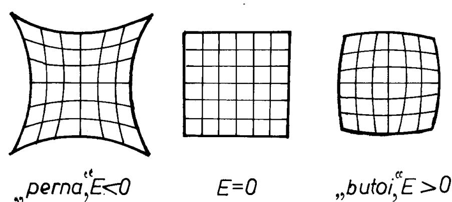



**Fig.76.** Distorsiunea.

Aberațiile geometrice primare descrise mai sus apar atunci când razele de lumină ies din domeniul paraxial și sunt cauzate de valoarea finită a aperturii (variabila $\rho$) și/sau a câmpului de vedere (variabila h). Ponderea acestor aberații este dată de coeficienții lui Seidel care, pentru o poziție dată a obiectului, depind de forma, grosimile, distanțele de separare și indicii de refracție ai componentelor sistemului optic și de poziția diafragmelor. Determinarea analitică explicită a coeficienților lui Seidel în funcție de multitudinea parametrilor de care depind reprezintă o sarcină extrem de dificilă chiar și pentru sisteme optice simple.

Pentru ilustrare, să considerăm o lentilă subțire diafragmată (fig.77,b), astfel că ea este traversată de razele de lumină numai în vecinătatea axului optic Oz, unde lentila se comportă aproape ca o lamă cu fețe plane și paralele, deci unghiurile de incidență și emergență sunt practic egale ($\theta_1$).

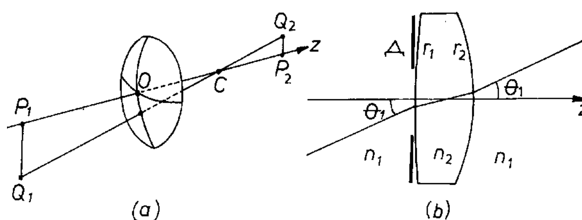



**Fig.77.** Pentru calculul astigmatismului unei lentile subțiri.

Ne propunem să calculăm astigmatismul acestei lentile aplicând de două ori formulele lui Young pentru dioptrul sferic (vezi paragraful 2.1, ecuațiile (115) și (116)), de astă dată fasciculul de raze provenind de la un punct obiect extra-axial $Q_1$ (fig.77, a). Astfel, considerând mediile de imersie extreme identice ($n_1 = n_3$) și notând cu $n = n_2/n_1$ indicele relativ de refracție al lentilei, pentru un evantai de raze meridionale (din planul $Q_1Oz$ ) ecuația (115) conduce la

$$\begin{cases} \frac{\cos^2\theta_1}{l} + \frac{n\cos^2\theta_2}{s_2'} = \frac{n\cos\theta_2 - \cos\theta_1}{r_1}, \\ -\frac{n\cos^2\theta_2}{s_2'} + \frac{\cos^2\theta_1}{t} = -\frac{n\cos\theta_2 - \cos\theta_1}{r_2}, \end{cases} \tag{309}$$

de unde, prin adunare, rezultă poziția $t$ a câmpului tangențial

$$\frac{1}{l} + \frac{1}{t} = \frac{n\cos\theta_2 - \cos\theta_1}{\cos^2\theta_1}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right). \tag{310}$$

În mod similar, pentru un evantai de raze ecuatoriale (sagitale), ecuația (117) conduce la

$$\begin{cases} \frac{1}{l} + \frac{n}{s_2''} = \frac{n\cos\theta_2 - \cos\theta_1}{r_1}, \\ -\frac{n}{s_2''} + \frac{1}{s} = -\frac{n\cos\theta_2 - \cos\theta_1}{r_2}, \end{cases} \tag{311}$$

de unde, prin adunare, rezultă, poziția s a câmpului sagital

$$\frac{1}{l} + \frac{1}{s} = (n\cos\theta_2 - \cos\theta_1)\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right). \tag{312}$$

În particular, pentru $\theta_1 = \theta_2 = 0$, abscisele oblice $l, s, t$ se transformă în abscise obișnuite (în lungul axului optic), respectiv $l_0, s_0, t_0$, astfel că ecuațiile (310) și (312) conduc la formula lentilei subțiri

$$\frac{1}{l_0} + \frac{1}{t_0} = \frac{1}{l_0} + \frac{1}{s_0} = (n-1)\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) = \frac{1}{f} \quad . \tag{313}$$

În continuare, vom considera o suprafață sferică obiect AOB de rază $OC = \rho$, așezată simetric față de axul optic Oz (fig.78). Notând segmentele $AP = l$, $OP = l_0$ și $\widehat{APO} = \theta_1$, avem

$$\rho^2 = l^2 + (l_0 - \rho)^2 - 2l\,(l_0 - \rho)\cos\theta_1,$$

sau, aproximând $\cos\theta_1 \approx 1 - (\theta_1^2/2)$,

$$\rho^2 = (l - l_0 + \rho)^2 + l\,(l_0 - \rho)\theta_1^2.$$

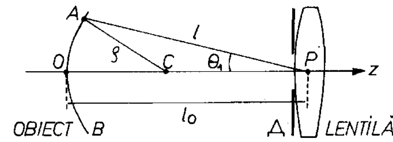



**Fig.78.** Pentru calculul curburilor $1/\rho_s$ și $1/\rho_t$ și deducerea condiției lui Petzval.

Dezvoltând în serie radicalul membrului al doilea și limitându-ne la primii doi termeni, obținem

$$\rho = l - l_0 + \rho + \frac{1}{2}\frac{l\,(l_0 - \rho)}{l - l_0 + \rho}\theta_1^2.$$

Neglijând $l - l_0$ față de ρ și rearanjând termenii rezultă finalmente relația

$$\frac{1}{l} = \frac{1}{l_0} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{l_0}\right)\theta_1^2, \tag{314}$$

valabilă în vecinătatea axului optic. Vom folosi această formulă atât pentru curbura $1/\rho$ a suprafeței obiect, cât și pentru curburile $1/\rho_t$, $1/\rho_s$ corespunzătoare câmpului tangențial, respectiv sagital, adică

$$\begin{cases} \frac{1}{t} = \frac{1}{t_0} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\rho_t} - \frac{1}{t_0}\right)\theta_1^2, \\ \frac{1}{s} = \frac{1}{s_0} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\rho_s} - \frac{1}{s_0}\right)\theta_1^2, \end{cases} \tag{315}$$

unde apare același unghi $\theta_1$ deoarece unghiul de emergență din lentilă este sensibil egal cu unghiul de incidență (fig.77,b). Introducând mai departe expresiile (314), (315) în ecuațiile (310) și (312) și ținând cont de relațiile (313) și de aproximațiile $\theta_1 = n\theta_2$, $\cos\theta \approx 1 - (\theta^2/2)$, $1/\cos^2\theta \approx 1 + \theta^2$, obținem rezultatul simplu

$$\begin{cases} \frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho_t} = \frac{3n+1}{nf}, \\ \frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho_s} = \frac{n+1}{nf}. \end{cases} \tag{316}$$

În particular, pentru o suprafață obiect plană $(\rho \to \infty)$, avem

$$\begin{cases} \frac{1}{\rho_t} = \frac{3n+1}{nf}, \\ \frac{1}{\rho_s} = \frac{n+1}{nf}. \end{cases} \tag{317}$$

Observăm că, pentru o lentilă dată, curburile câmpului au același sens, curbura $1/\rho_t$ a câmpului tangențial fiind mai mare decât curbura$1/\rho_s$ a câmpului sagital (vezi și fig. 75). Curburile câmpului pentru lentila convergentă $(1/f > 0)$ și lentila divergentă $(1/f < 0)$ sunt de sensuri opuse. Apare astfel posibilitatea compensării astigmatismului și curburii câmpului pentru un sistem centrat de lentile subțiri alipite și diafragmate. În acest caz, curburile câmpului se însumează algebric, adică

$$\begin{cases} \frac{1}{\rho_t} = \sum_i \frac{3n_i+1}{n_i f_i} = \frac{3}{f} + \sum_i \frac{1}{n_i f_i}, \\ \frac{1}{\rho_s} = \sum_i \frac{n_i+1}{n_i f_i} = \frac{1}{f} + \sum_i \frac{1}{n_i f_i}, \end{cases} \tag{318}$$

unde am notat cu $1/f = \sum_i 1/f_i$ convergența sistemului.

Cerința $\rho_t = \rho_s$ de suprimare a astigmatismului, implică deci condiția $1/f = 0$, adică sistemul să fie afocal (echivalent cu o lamă plan-paralelă), caz în care ecuațiile (318) devin

$$\frac{1}{\rho_t} = \frac{1}{\rho_s} = \sum_i \frac{1}{n_i f_i}. \tag{319}$$

Impunând și anihilarea curburii câmpului, adică $1/\rho_t = 1/\rho_s = 0$, rezultă ***condiția lui Petzval***

$$\sum_i \frac{1}{n_i f_i} = 0. \tag{320}$$

Remarcăm că și sistemele cu distanță focală finită ($1/f \neq 0$) pot fi ameliorate dacă satisfac condiția lui Petzval (320). În acest caz, cum rezultă din ecuațiile (318), $\rho_s = 3\rho_t = f$.

În general, o oarecare curbură a câmpului poate fi tolerată la instrumentele vizuale deoarece ochiul se poate acomoda pentru ea. În schimb, pentru obiectivele aparatelor fotografice sau de proiecție, cerința de aplatizare a câmpului este mult mai strictă. Dacă condiția lui Petzval nu este suficientă sau nu poate fi aplicată, câmpul poate fi substanțial rectificat în domeniul axial cu ajutorul unei ***lentile aplatizoare de câmp (field flattener)***, plasată în imediata vecinătate a planului imagine. De regulă, curbura unei astfel de lentile este mică pentru a nu introduce aberații.

Dăm aici, fără demonstrație, și alte rezultate privind aberațiile lentilelor subțiri. Astfel, pentru obiecte îndepărtate, razele de curbură care minimizează aberația sferică sunt*

$$\begin{cases} r_1 = \frac{2(n+2)(n+1)}{n(2n-1)} f, \\ r_2 = -\frac{2(n+2)(n-1)}{4+n-2n^2} f, \end{cases} \tag{321}$$

iar cele care elimină complet coma sunt

$$\begin{cases} r_1 = \frac{n^2-1}{n^2} f, \\ r_2 = \frac{n^2-1}{n^2-n-1} f. \end{cases} \tag{322}$$

Proiectantul de lentile este confruntat cu un compromis optimal între criteriile (321) și (322).

În general, pentru a minimiza aberațiile cromatice și geometrice și a găsi o configurație optimă pentru scopul propus, proiectantul de sisteme optice trebuie să manipuleze un spațiu multidimensional de variabile (indici de refracție, forme, grosimi, distanțe, diafragme). Un exemplu simplu a fost prezentat în paragraful 2.7 în care s-a arătat cum se compensează aberația cromatică prin combinarea de lentile confecționate din sticle diferite. Aceste lentile prezintă aberații sferice de semne opuse ce depind de forma lentilelor. Ele prezintă de asemenea și aberații de coma de semne opuse care depind (în alt mod) de forma

* Vezi V.V. Bianu, *Optica geometrică*, Ed. Tehnică, București, 1962 (§126, pag.208-215).

lor. De aceea, gradele de libertate, disponibile la acromatizarea sistemului, sunt adeseori folosite pentru a compensa totodată, pe cât este posibil, și aberațiile sferice și coma.

Foarte extinse sunt și metodele prin care aberațiile de ordinul al treilea, prezentate mai înainte, sunt contrabalansate în parte prin aberațiile corespunzătoare de ordin superior. Pentru astfel de rafinamente ca și, în general, pentru optimizarea automată a parametrilor sistemelor optice, există astăzi programe elaborate de calcul pentru ***trasarea exactă a razelor de lumină*** prin sisteme și pentru ***determinarea diagramei punctelor (spot diagram)*** de intersecție cu diverse plane perpendiculare pe axul optic. Astfel, pornind cu o rețea regulată de puncte (de obicei pătratică) din planul pupilei de intrare, distribuția densității punctelor de intercepție pe orice plan ulterior, de exemplu pe planul imaginii gaussiene sau pe planele vecine, reprezintă o măsură directă a distribuției fluxului de lumină în acel plan.

Pe de altă parte, începând cu teoria clasică a aberațiilor, fundamentată de Hamilton (metoda funcțiilor caracteristice) și de Bruns (metoda funcției eiconal) și până în prezent, metodele analitice de studiu a proprietăților geometrice ale suprafețelor de undă au fost și sunt investigate intens.

Spre deosebire de undele plane, sferice sau cilindrice, ce intervin uneori, în general suprafețele de undă uzuale reprezintă entități incredibil de complicate. Chiar dacă, departe de zona de focalizare, apare destul de netedă și de tratabilă, pe măsură ce se apropie de aceasta, suprafața de undă devine din ce în ce mai greu de vizualizat și practic imposibil de analizat. Un instrument foarte puternic pentru controlul optic, în special al suprafețelor de undă furnizate de componentele optice, este ***interferometrul Twyman-Green*** (fig.79). Acesta reprezintă o variantă a interferometrului lui Michelson, cu o sursă punctuală S, de lumină monocromatică, în focarul lentilei $L_1$ și cu o oglindă $O_2$ perfect sferică, cu centrul C în focarul gaussian al lentilei sau sistemului optic de testat L. Dacă acesta nu are aberații, atunci unda care se reflectă de $O_2$ și se întoarce la divizorul de fascicul D este perfect plană și câmpul de interferență cu unda plană reflectată de oglinda $O_1$ apare uniform. Dacă însă aberațiile deformează suprafața undei care trece (dus și întors) prin sistemul studiat L, atunci această deformare se manifestă clar prin conturul franjelor de interferență (linii de egală diferență de fază față de unda plană de referință). Figurile de interferență pot fi observate cu ochiul sau fotografiate. Fig.79 ilustrează interferogramele Twyman-Green caracteristice pentru aberația sferică (a) și coma (b), ambele corespunzând planului focal paraxial, și pentru astigmatism, corespunzător planului cercului de minimă difuzie (c), planului unei linii focale (d) sau altui plan (e). Orice variație locală a drumului optic, până la fracțiuni de lungimi de undă, cauzată de imperfecțiuni ale suprafațelor sistemului sau de neomogenități ale indicelui de refracție, produce deformarea suprafeței de undă și generează franje în zona respectivă a

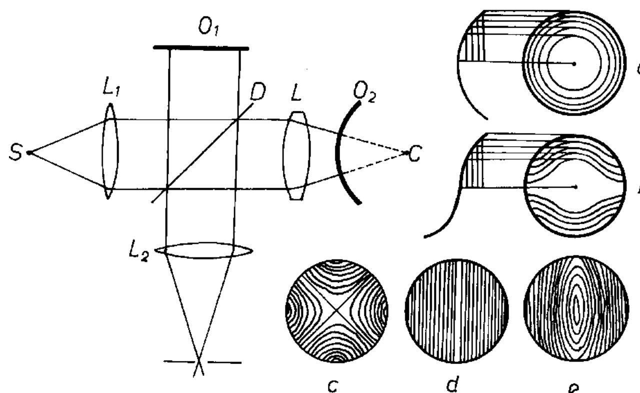


**Fig.79.** Interferometrul Twyman - Green și câteva interferograme.

câmpului de interferență, care poate fi astfel depistată și marcată. Această metodă are marele avantaj că furnizează imediat forma completă a suprafeței de undă, cum este ilustrat prin construcția din stânga interferogramelor (a) și (b) pentru planul meridional. Ca de obicei, performanțele interferometrului cresc substanțial dacă sursa de lumină monocromatică convențională este înlocuită cu o sursă de lumină laser.

Anterior, am considerat în mod constant numai lentile și sisteme optice cu suprafețe sferice și, odată cu aceasta, și aberațiile geometrice inerente lor. Datorită relativei ușurințe și preciziei mari cu care pot fi realizate suprafețele sferice, acestea au căpătat cea mai largă utilizare, în contrast cu suprafețele carteziene, (vezi paragraful 1.3.). Menționăm însă că suprafețele și elementele asferice stigmatice sunt frecvent încorporate în sistemele optice de format imagini de mare performanță.

Dacă prin metoda interferometrică, descrisă mai sus, se pot stabili cu precizie deformările suprafețelor de undă de către un sistem optic real, se pune problema corectării lor corespunzătoare. De aceea, în încheiere, vom analiza, pe scurt, problema practică, importantă, *a suprafețelor corectoare*. Astfel, vom arăta că orice defect de stigmatism (al unei perechi date de puncte conjugate), care se produce la trecerea unui fascicul inițial homocentric printr-un sistem optic, poate fi eliminat prin corectarea corespunzătoare a suprafeței de separare a ultimului dioptru refringent al sistemului. Pentru aceasta, ne vom referi la construcția lui Huygens, fig.10 din paragraful 1.2, și vom reformula problema în felul următor: fiind dată suprafața de undă (deformată) $\phi_1$ din penultimul mediu ($n_1$) al unui sistem optic, să determinăm forma ultimei suprafețe de separare $\Sigma$ astfel ca suprafața de undă $\phi_2$ din ultimul mediu ($n_2$) să fie sferică. Poziția suprafeței $\Sigma$ se determină astfel din intersecția acelor normale la $\phi_1$ și $\phi_2$, ale căror segmente $s_1$, $s_2$ până la $\Sigma$ satisfac condiția de stigmatism $n_1 s_1 + n_2 s_2 = constant$. Evident, în funcție de valoarea aleasă pentru constanta din această condiție, există o infinitate de suprafețe $\Sigma$ posibile.

În practică este, deseori, suficient să se procedeze la ***retușuri optice locale***. Pentru aceasta, să considerăm cazul obișnuit al ultimei suprafețe refringente $\Sigma$, care separă un mediu de indice $n$ de aer ($n = 1$), și al unei suprafețe de undă oarecare $\phi$ în ultimul mediu, ușor deplasată față de poziția teoretică $\phi_0$, corespunzătoare stigmatismului riguros (fig.80). Pentru compensarea aberației locale $\delta$ a undei, este suficient deci să șlefuim puțin suprafața inițială $\Sigma$ astfel ca să fie adusă în poziția corectă $\Sigma_0$. Este ușor de stabilit relația dintre adâncimea $\varepsilon$ de șlefuire locală și aberația de undă $\delta$ care trebuie eliminată. Astfel, condiția de retuș optic local se scrie

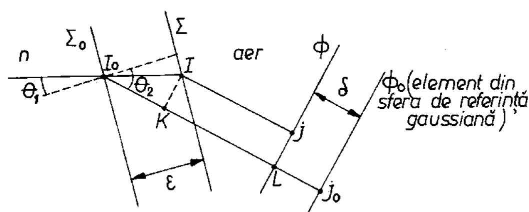


**Fig.80.** Pentru înțelegerea principiului retușurilor optice.

$$n I_0 I + IJ = I_0 J_0, \tag{323}$$

sau, ținând cont că $IJ = KL$,

$$n I_0 I = I_0 K + \delta. \tag{324}$$

Din geometria fig.80 avem însă

$$I_0I = \varepsilon/\cos\theta_1, \quad I_0K = I_0I \cdot \cos(\theta_2 - \theta_1), \tag{325}$$

astfel că din ecuațiile (324), (325) obținem relația căutată dintre ε și δ, adică

$$\varepsilon = \frac{\cos\theta_1}{n - \cos(\theta_2 - \theta_1)} \cdot \delta \approx \frac{\delta}{n-1}. \tag{326}$$

Considerații similare, pentru o suprafață reflectantă, ne conduc la relația

$$\varepsilon = \frac{\delta}{2\cos\theta_1} \approx \frac{\delta}{2}. \tag{327}$$

Deoarece drumul pe diversele raze dintre punctele conjugate riguros stigmatice trebuie să conțină același număr de $\lambda$, rezultă că toleranța asupra aberației $\delta$, deci a lui $\varepsilon$, trebuie să coboare la mici fracțiuni de $\lambda$.

# Capitolul III
# MEDII NEOMOGENE

Curbarea continuă a razei de lumină în medii neomogene explică multe fenomene naturale cum sunt, de exemplu, fenomenele de ***refracție atmosferică***. Astfel, datorită scăderii densității, respectiv a indicelui de refracție al aerului, cu altitudinea, razele de lumină care vin de la o stea se curbează cu concavitatea spre Pământ (vezi paragraful 1.1, ecuația (16)). Din acest motiv, înălțimea aparentă a stelei față de linia orizontului este mai mare decât înălțimea reală (***refracția astronomică regulată***). ***Refracția neregulată***, datorată turbulenței atmosferice, cauzează ***scintilația stelelor***. Efecte similare au loc la suprafața Pământului sau a altor suprafețe când temperatura acestora este mai mare sau mai mică decât a aerului înconjurător, inducând astfel un gradient de temperatură, respectiv de densitate și de indice de refracție (***miraj***).

În general, calculul traiectoriei razelor de lumină în medii neomogene continue prezintă interes pentru multe aplicații. Ca prim exemplu, să considerăm ***lentila de gaz*** care constă, în principiu, dintr-un tub cilindric metalic încălzit prin care trece un curent laminar de gaz. Concentrația gazului, deci și indicele de refracție este mai mare pe axul tubului, unde gazul este mai rece. Din acest motiv, razele de lumină trimise prin tub sunt deviate spre axul acestuia ca sub efectul unei lentile. În comparație cu o lentilă de sticlă, lentila de gaz elimină complet pierderile de lumină cauzate de reflexie la interfețele aer-sticlă și de împrăștiere pe praful și imperfecțiunile de pe suprafața lentilei. O importanță practică deosebită o au structurile gradate planare sau cu simetrie cilindrică pentru realizarea ***ghidurilor optice*** (plăci și fibre optice).

O metodă foarte sensibilă pentru vizualizarea neomogenităților indicelui de refracție, bazată pe devierea razelor de lumină de către acestea, a fost propusă de A. Töpler (1864) și este cunoscută sub numele de ***metoda Schlieren*** sau ***metoda striurilor*** (de la cuvântul german die Schliere care înseamnă striu). Principiul metodei este ilustrat în fig. 81,a, unde imaginea sursei de lumină S (punctuală sau fantă) este formată pe un mic disc opac (sau "lamă de cuțit") D cu ajutorul lentilelor $L_1$, $L_2$, între care este montată camera Schlieren C care conține mediul optic transparent de investigat. Lentila $L_3$ este folosită pentru a forma imaginea diverselor plane din acest mediu pe ecranul E. Evident, dacă mediul este omogen, ecranul E apare întunecat datorită ecranării realizate mai înainte de discul D. Dacă însă mediul prezintă neomogenități, razele de lumină deflectate de către acestea ocolesc obstacolul D și formează pe ecranul E

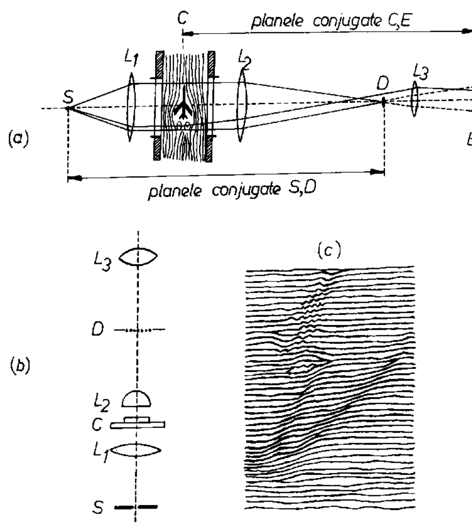



**Fig.81.** Principiul metodei Schlieren.

***imaginea Schlieren***, adică o hartă a gradienților locali ai indicelui de refracție din planul pus la punct cu ajutorul lentilei $L_3$. O metodă complementară cu tehnica Schlieren este ***metoda shadow*** sau ***metoda umbrelor*** în care stopul D este înlocuit cu o mică apertură într-un ecran opac. În acest caz, vor ajunge pe ecranul E numai razele de lumină nedeviate, cele deviate lovind ecranul opac și fiind excluse din fasciculul de lumină inițial. În felul acesta, pe ecranul E apare ***imaginea shadow***, reprezentând pe un fond luminos contururile întunecate ale zonelor cu indice de refracție neuniform.

Și în acest domeniu este loc pentru multă imaginație. Astfel, de exemplu, fig.81,b, ilustrează adaptarea unui microscop la observații prin metoda Schlieren (J.R. Meyer- Arendt, 1961). Adaptarea constă în montarea între obiectiv ($L_2$) și ocular ($L_3$) a unei rețele unidimensionale (D), de 5-10 linii/mm, paralele cu fanta de iluminare S. Dacă obiectul investigat, depus pe lama de sticla (C), este omogen, imaginea sa apare brăzdată de liniile echidistante corespunzătoare rețelei (D). Orice variație a indicelui de refracție cauzează distorsiuni caracteristice, cum este arătat în fig.81,c, când un strat subțire de substanță transparentă acoperă parțial lama de sticlă (C).

Un alt mediu "optic" continuu neomogen se realizează în dispozitivele de ***optică electronică și ionică***, în particular în microscoapele electronice și ionice. Mișcarea nerelativistă a particulelor este descrisă de legile mecanicii clasice și, cum am arătat în paragraful 1.2, pentru un câmp de forțe conservative, satisface principiul Maupertuis-Euler, analog principiului lui Fermat, viteza particulei jucând rolul indicelui de refracție n. Astfel, de exemplu, considerând mișcarea particulelor încărcate într-un câmp electrostatic și alegând convenabil zeroul potențialului electric U, avem analogia $n = \sqrt{U}$ unde U trebuie să satisfacă ***ecuația lui Laplace*** $\Delta U = 0$. Cu această condiție, toate ecuațiile opticii geometrice pentru razele de lumină rămân valabile și pentru optica geometrică a traiectoriilor electronilor și ionilor. Astfel, traiectoriile particulelor sunt normale la familia de suprafețe care satisfac ***ecuația eiconalului*** $|\nabla\phi| = \sqrt{U}$, ***extinderea*** $Ud\Omega dS\cos\gamma$ a fasciculului de particule rămâne invariabilă în timpul propagării, radianțele obiectului și imaginii satisfac ***teorema lui Clausius*** $L_1/U_1 = L_2/U_2$, ș.a.m.d.

O metodă generală de calcul pentru câmpul optic în aproximația opticii geometrice constă în determinarea suprafețelor de undă $\phi(\vec{r})$ =constant, prin integrarea ecuației eiconalului $(\nabla\phi)^2 = n^2$ și construcția razelor de lumină cu ajutorul ecuației $\nabla\phi = n\vec{\tau}$. Alternativ, se poate trece direct la integrarea ecuației razei de lumină, respectiv a ecuațiilor Hamilton (canonice) sau Euler-Lagrange.

În continuare, vom ilustra ultima procedură pentru situațiile cele mai simple, în care distribuția indicelui de refracție prezintă anumite simetrii și anume simetrie de translație (structuri planare), simetrie cilindrică și simetrie sferică.

## *§ 3. 1. Structuri planare*

Să considerăm problema unidimensională a indicelui de refracție de forma generală $n = n(x)$ într-un sistem cartezian de coordonate. Elementul de drum pe traiectorie este astfel dat de ecuația

$$(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2. \qquad (328)$$

Datorită dependenței indicelui de refracție numai de variabila x este convenabil să considerăm ecuația razei de lumină pentru celelalte două componente și anume

$$\frac{d}{ds}(n\tau_y) = 0, \qquad \frac{d}{ds}(n\tau_z) = 0, \tag{329}$$

de unde rezultă că mărimile $n\tau_y$ și $n\tau_z$ se conservă de-a lungul traiectoriei, adică

$$ndy/ds = A, \qquad ndz/ds = B, \tag{330}$$

unde A, B sunt constante care se determină din condițiile inițiale. Din ecuațiile (328) și (330) mai rezultă

$$ndx/ds = \sqrt{n^2 - (A^2 + B^2)}\ . \tag{331}$$

Parametrul s se elimină prin împărțirea ecuațiilor (330) și (331) de unde obținem sistemul

$$\begin{cases} dy/dz = A/B, \\ dy/dx = A/\sqrt{n^2(x) - (A^2 + B^2)}\ , \\ dz/dx = B/\sqrt{n^2(x) - (A^2 + B^2)}\ , \end{cases} \tag{332}$$

prin integrarea căruia rezultă proiecțiile traiectoriei razei pe cele trei plane de coordonate. Observăm că, indiferent de forma distribuției $n(x)$, urma traiectoriei în planul yOz este dreapta

$$y = (A/B)z + C, \tag{333}$$

adică traiectoria este o curbă plană în planul definit de ecuația (333). De aceea, fără a pierde din generalitate, vom considera traiectoria în planul $y = 0$, adică alegem constantele $A = C = 0$, cum este ilustrat în fig.82. Sensul fizic al constantei B, ecuația (330), este în acest caz

$$B = n\tau_z = ndz/ds = n\cos\gamma = n_0\cos\gamma_0, \tag{334}$$

unde $n_0$ și $\gamma_0$ sunt valorile corespunzătoare "punctului de lansare" $x = 0$, $z = z_0$. Evident, ecuația (334) reprezintă ***legea Snell-Descartes*** $n\sin\alpha = n_0\sin\alpha_0$ pentru mediile cu structură planară. Cu $A = 0$, $B = n_0\cos\gamma_0$, a treia ecuație integrată reprezintă traiectoria razei

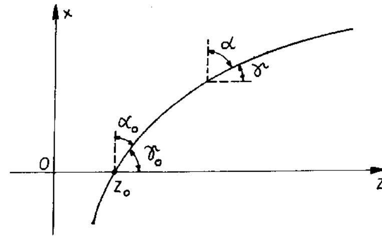



**Fig.82.** O traiectorie luminoasă și parametrii săi locali.

$$z(x) - z_0 = \int_0^x \frac{n_0\cos\gamma_0}{\sqrt{n^2(x) - n_0^2\cos^2\gamma_0}}dx. \tag{335}$$

Domeniul valorilor x care permit propagarea razelor de lumină rezultă din condiția ca integrandul să fie real, adică

$$n(x) \geq n_0 \cos\gamma_0. \qquad (336)$$

În cazul în care $n(x) < n_0$ și $dn/dx < 0$ (fig.83), ecuația (336) impune o valoare limită $x = x_{max}$ dată de ecuația

$$n(x_{max}) = n_0 \cos\gamma_0. \qquad (337)$$

Această valoare limită, pentru care $dx/ds = 0$ (vezi ecuația (331)) corespunde ***punctului de întoarcere*** sau de ***reflexie totală***. Cu cât este mai mare unghiul de lansare $\gamma_0$, cu atât este mai mare și valoarea distanței de pătrundere $x_{max}$ (fig.83). Evident, reflexia totală nu are loc dacă $n(x) > n_0$ și $dn/dx > 0$.

Să considerăm în continuare distribuția cu simetrie plană, adică un mediu în care indicele de refracție scade simetric, de o parte și de alta, față de valoarea $n_0$ din planul $x = 0$. În acest caz, în funcție de unghiul $\gamma_0$, traiectoriile sunt confinate între o limită superioară $x_{max}$ și o limită inferioară $x_{min}$. Astfel de distribuții prezintă o deosebită importanță practică pentru ghidarea luminii în circuite optice, cum este, de exemplu, ***distribuția parabolică*** denumită comercial ***Selfoc***, al cărei indice are expresia

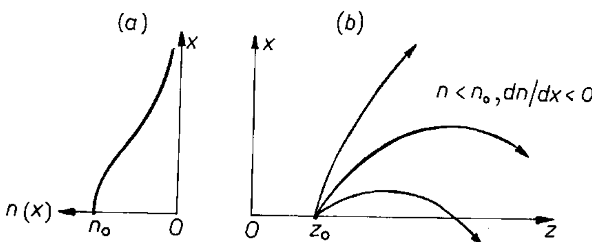



**Fig.83.** O familie de traiectorii luminoase (b) pentru distribuția (a).

$$n^2 = n_0^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right), \qquad (338)$$

unde $n_0$ și $a$ sunt constante (fig.84). Efectuând integrala din ecuația traiectoriei, ecuația (335), cu distribuția (338) și luând punctul de lansare în originea $O(x = 0, z = 0)$ a coordonatelor, obținem

$$z(x) = a\cos\gamma_0 \cdot \arcsin\left(\frac{x}{a\sin\gamma_0}\right), \qquad (339)$$

sau, inversând dependența,

$$x(z) = a\sin\gamma_0 \cdot \sin\left(\frac{z}{a\cos\gamma_0}\right). \qquad (340)$$

Ecuația (340) reprezintă o traiectorie sinusoidală (fig.84) de amplitudine $x_{max} = a\sin\gamma_0$ (cum rezultă și direct din condiția de reflexie totală (337) și distribuția (338)) și de semi-perioadă spațială $\Delta z = \pi a\cos\gamma_0$. Cu creșterea unghiului de lansare $\gamma_0$,

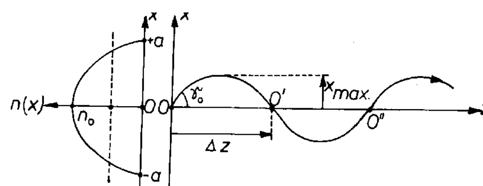



**Fig.84.** O traiectorie sinusoidală în structura planară Selfoc.

amplitudinea crește și perioada scade. Cum era de așteptat, din considerațiile generale făcute mai înainte, lumina este confinată să se propage între limitele $\pm x_{max}$. Dar, proprietatea remarcabilă a sistemului Selfoc constă în focalizarea tuturor razelor paraxiale ($\cos\gamma_0 \approx 1$) în același punct după fiecare semi-perioadă $\Delta z \approx \pi a$. Punctele de focalizare $O', O''$ ..., reprezintă veritabile imagini succesive ale punctului de lansare O, întrucât drumul optic între două focalizări succesive consecutive este practic același pentru razele paraxiale. Într-adevăr, ținând cont de ecuațiile (334), (338), (340) avem

$$[OO'] = \int_O^{O'} n ds = \int_0^{\Delta z} n \frac{ds}{dz} dz = (n_0 \cos\gamma_0)^{-1} \int_0^{\Delta z} n^2[x(z)]dz = \pi a n_0 + O(\gamma_0^2), \qquad (341)$$

unde $O(\gamma_0^2)$ reprezintă termeni în $\gamma_0$ începând cu gradul al doilea. Această proprietate se explică prin aceea că, cu creșterea unghiului de lansare $\gamma_0$, raza parcurge între două focalizări un drum geometric mai lung decât raza axială ($\gamma_0 = 0$) dar, în cea mai mare parte, printr-o regiune de indice de refracție mai mic, astfel că drumul optic rămâne același.

## *§ 3. 2. Structuri cilindrice*

Să considerăm un mediu al cărui indice de refracție depinde numai de distanța r față de o axă fixă Oz. În acest caz, vom scrie mai întâi traiectoria în reprezentarea $r(z)$, $\theta(z)$, $z$ (vezi fig.13 din paragraful 1.2) pentru a ilustra aplicarea formalismului lagrangeian în coordonate cilindrice r, θ, z. Elementul de drum pe traiectorie este, deci, (vezi fig.85)

$$ds = \sqrt{(dr)^2 + (rd\theta)^2 + (dz)^2} =$$

$$= (1 + r'^2 + r^2\theta'^2)^{1/2} dz, \qquad (342)$$

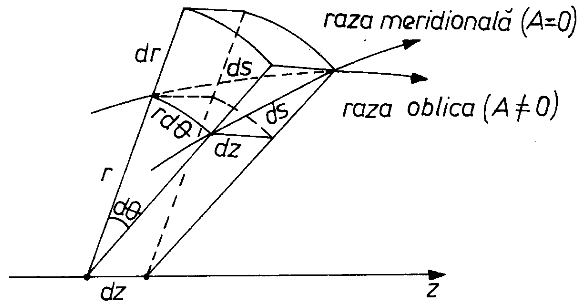


**Fig.85.** Element de structură cu simetrie cilindrică.

unde am notat $r' = dr/dz$, $\theta' = d\theta/dz$, astfel că ***lagrangeianul optic*** are forma (vezi ecuația (50) din paragraful 1.2)

$$L(r, \theta, r', \theta', z) = n\frac{ds}{dz} = n(r) \cdot (1 + r'^2 + r^2\theta'^2)^{1/2}. \qquad (343)$$

Evident, expresia (343) a lagrangeianului în coordonate cilindrice rezultă din expresia sa în coordonate carteziene

$$L(x, y, x', y', z) = n\frac{ds}{dz} = n(x, y, z) \cdot (1 + x'^2 + y'^2)^{1/2} \quad , \qquad (344)$$

în care efectuăm transformarea $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, $z = z$.

Acum avem la dispoziție următorul sistem de ecuații diferențiale pentru traiectoria razei de lumină

$$\frac{d}{dz}\left(\frac{\partial L}{\partial r'}\right)=\frac{\partial L}{\partial r},\quad \frac{d}{dz}\left(\frac{\partial L}{\partial \theta'}\right)=\frac{\partial L}{\partial \theta},\quad \frac{d}{ds}(n\tau_z)=\frac{\partial n}{\partial z},\tag{345}$$

în care primele două ecuații sunt ***ecuațiile Euler-Lagrange*** iar a treia este componenta $z$ a ecuației razei. Cum am arătat în paragraful 1.2, numai două din ecuațiile (345) sunt independente, astfel că le vom alege pe acelea care sunt mai ușor de integrat. Pentru distribuția cilindrică $n=n(r)$, considerată aici, avem $\partial L/\partial\theta=0$, $\partial n/\partial z=0$, astfel că din ultimele două ecuații (345) rezultă conservarea momentelor (impulsurilor) corespunzătoare, adică

$$p_\theta=\frac{\partial L}{\partial \theta'}=\frac{nr^2\theta'}{(1+r'^2+r^2\theta'^2)^{1/2}}=nr^2 d\theta/ds=A,\tag{346}$$

$$p_z=n\tau_z=ndz/ds=B,\tag{347}$$

unde

$$A=(p_\theta)_0=n_0r_0^2(d\theta/ds)_0,\quad B=(p_z)_0=n_0\cos\gamma_0,\tag{348}$$

sunt constante de integrare fixate de condițiile inițiale ale traiectoriei. Din ecuația (346) observăm că, dacă $A=0$, deci $d\theta/ds=0$, atunci traiectoria rămâne mereu într-un plan dat care conține axul de simetrie Oz și reprezintă o ***rază meridională***, iar dacă $A\neq 0$, deci $d\theta/ds\neq 0$, atunci traiectoria se rotește în jurul axului Oz și reprezintă o ***rază oblică*** (fig. 85). Mai observăm că orice rază lansată de pe axul Oz $(r_0=0)$ este meridională, iar dacă $r_0\neq 0$, raza este meridională sau oblică, după cum $(d\theta/ds)_0$ este zero sau diferit de zero.

Din expresia elementului de drum, ecuația (342), mai avem

$$\frac{dr}{ds}=\sqrt{1-\left(r\frac{d\theta}{ds}\right)^2-\left(\frac{dz}{ds}\right)^2}.\tag{349}$$

Vom transcrie ecuațiile (346), (347), (349) în forma sistemului

$$\begin{cases}\dfrac{d\theta}{ds}=\dfrac{A}{r^2n(r)},\\ \dfrac{dz}{ds}=\dfrac{B}{n(r)},\\ \dfrac{dr}{ds}=\sqrt{1-\dfrac{A^2}{r^2n^2(r)}-\dfrac{B^2}{n^2(r)}},\end{cases}\tag{350}$$

sau, prin împărțirea primelor două ecuații la a treia și integrare,

$$\theta = \int \frac{A dr}{r^2 \sqrt{n^2(r) - \left(\frac{A^2}{r^2} + B^2\right)}} \quad , \tag{351}$$

$$z = \int \frac{B dr}{\sqrt{n^2(r) - \left(\frac{A^2}{r^2} + B^2\right)}} \; . \tag{352}$$

Prin ecuațiile (351), (352) am obținut astfel expresia generală a traiectoriei razei de lumină în medii cu simetrie cilindrică.

Domeniul valorilor r care permit propagarea razelor de lumină rezultă din condiția ca integrandul să fie real, adică

$$n^2(r) \geq \frac{A^2}{r^2} + B^2, \tag{353}$$

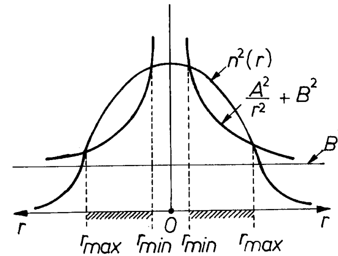



**Fig.86.** Distribuție $n^2(r)$ în formă de clopot și domeniile reale de propagare.

unde membrul drept, care prin constantele A, B depinde de condițiile inițiale, ecuațiile (348), este o funcție monoton descrescătoare de r. Pentru ilustrare, să considerăm funcția $n^2(r)$ în formă de clopot (fig.86). Rezultă că raza de lumină se poate propaga numai prin domeniul hașurat $r_{max} \geq r \geq r_{min}$, unde valorile limită $r_{min}$, $r_{max}$ sunt soluțiile ecuației din condiția (353). Aceste limite, care rezultă și din a treia ecuație (350) pentru $dr/ds = 0$, reprezintă ***punctele de întoarcere*** sau ***de reflexie totală***.

În încheiere să discutăm calitativ proprietățile de ghidare a luminii pentru o ***fibră optică*** cu distribuție a indicelui de refracție de tip ***Selfoc****, adică

$$n^2 = n_0^2\left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right). \tag{354}$$

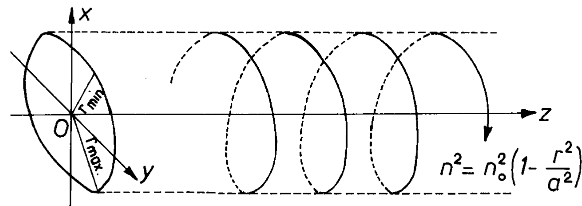



**Fig.87.** O traiectorie luminoasă într-o fibră optică Selfoc.

Astfel, efectuând integralele (351), (352) cu distribuția (354), rezultă, în general, o traiectorie oblică de forma unei elice eliptice în jurul axului de simetrie Oz (fig.87). Proiecția acestei elice pe un plan transversal xOy este o elipsă cu semi-axele egale cu $r_{min}$ și $r_{max}$. Prin creșterea constantei A, curba $(A/r)^2 + B^2$ din fig.86 se ridică, respectiv domeniul permis $r_{min} \leq r \leq r_{max}$ se îngustează, până când elicea eliptică

* Astfel de fibre sau bare optice sunt produse de firma japoneză Nippon Sheet Glass Co.

degenerează într-o elice circulară ($r_{\min} = r_{\max}$). Dacă $A = 0$ și $B \neq 0$, integrandul din ecuația (351) se anulează iar integrala (352) se reduce la cea discutată în paragraful 3.1 pentru distribuția unidimensională, ecuația (335). În cazul distribuției Selfoc, traiectoria oblică elicoidală devine plană meridională, de forma ecuației (340), reprezentată în fig.84. Alternativ, dacă $A \neq 0$ și $B = 0$, integrandul din ecuația (352) se anulează iar integrala (351) devine identică cu aceea care va fi obținută în secțiunea următoare, paragraful 3.3, pentru simetria sferică, ecuația (361). În acest caz, traiectoria este plană într-un plan perpendicular pe axul de simetrie Oz.

Observăm că, pentru ca aproximația opticii geometrice să fie suficient de bună, este necesar ca diametrul fibrelor optice să fie cel puțin de câteva zeci de ori mai mare decât lungimea de undă. Cu această condiție, fibrele optice Selfoc permit propagarea luminii la mare distanță cu pierderi foarte mici și au importante aplicații în comunicațiile optice. De asemenea, datorită proprietății lor de focalizare periodică a luminii, bare cilindrice de sticlă cu distribuție parabolică a indicelui de refracție sunt utilizate ca ***micro-lentile Selfoc***. Astfel de bare cu diametrul de câțiva milimetri (deci mult mai mare decât al fibrelor optice Selfoc), permit transferul imaginii de la un capăt la altul.

## *§ 3. 3. Structuri sferice*

Să scriem mai întâi ecuația razei de lumină, ecuația (13)

$$\frac{d}{ds}(n\vec{\tau}) = \nabla n, \tag{355}$$

înmulțită vectorial cu vectorul de poziție $\vec{r}$. Rezultă

$$\frac{d}{ds}[\vec{r} \times (n\vec{\tau})] = \vec{r} \times \nabla n, \tag{356}$$

unde, pentru completarea derivatei totale din membrul stâng, am adăugat termenul identic nul $\vec{\tau} \times (n\vec{\tau})$.

În continuare, vom considera un mediu al cărui indice de refracție depinde numai de distanța r față de un punct fix O, adică $n = n(r)$. Pentru conveniență, vom lua centrul de simetrie O și ca origine a vectorului de poziție $\vec{r}$ a traiectoriei razei de lumină astfel că $\nabla n = (\vec{r}/r)dn/dr$. Cu această alegere a originii coordonatelor cu care vom repera traiectoria, avem $\vec{r} \times \nabla n = 0$. În consecință, din ecuația razei în forma ecuației (356) rezultă că vectorul $\vec{r} \times (n\vec{\tau})$ se conservă de-a lungul traiectoriei, adică

$$\vec{r} \times (n\vec{\tau}) = \vec{A}, \tag{357}$$

unde $\vec{A}$ este un vector constant pentru fiecare traiectorie. Evident, această teoremă este analoagă teoremei de conservare a momentului cinetic din mecanică privind mișcarea particulelor într-un câmp de forțe centrale. Din ecuația (357) rezultă că, indiferent de vectorii inițiali $\vec{r}_0, \vec{\tau}_0$, de lansare, traiectoria razei de lumină este o curbă plană în planul definit de $(\vec{r}_0, \vec{\tau}_0)$, normal pe $\vec{A}$, și care trece prin centrul de simetrie O. Scrisă în modul, ecuația (357) poartă numele de ***teorema lui Bouguer***

$$rn(r)\sin\varphi = r_0 n(r_0)\sin\varphi_0 = r_m n(r_m) = A, \tag{358}$$

unde $\varphi$ este unghiul dintre vectorii $\vec{r},\vec{\tau}$, respectiv $\varphi_0$ este unghiul dintre vectorii inițiali $\vec{r}_0,\vec{\tau}_0$, iar $r_m$ reprezintă distanța minimă $r_{\min}$ (sau distanța maximă $r_{\max}$) a traiectoriei față de centrul de simetrie astfel că $\varphi_m = \pi/2$ (fig.88). Observăm că punctelor aflate la aceeași distanță r de origine le corespunde aceeași valoare $\sin\varphi$ adică unghiul $\varphi$, respectiv $\pi-\varphi$.

În continuare, este convenabil să considerăm coordonatele polare $r$, $\theta$ în planul traiectoriei și cu originea în centrul de simetrie O. Din geometrie (fig.88) rezultă relația $rd\theta/ds = \sin\varphi$ astfel că ecuația (358) se mai scrie

$$nr^2\frac{d\theta}{ds} = A, \tag{359}$$

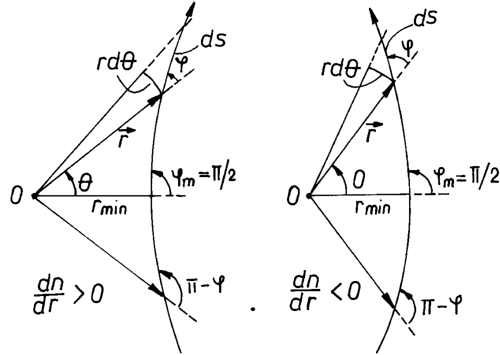



**Fig.88.** Traiectorii luminoase în structuri cu simetrie sferică.

ecuație analoagă cu ecuația (346) din problema simetriei cilindrice. Pe de altă parte, folosind expresia elementului de drum pe traiectorie $(ds)^2 = (dr)^2 + (rd\theta)^2$, avem

$$\frac{dr}{ds} = \sqrt{1 - r^2\left(\frac{d\theta}{ds}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{A^2}{r^2 n^2}}\,. \tag{360}$$

Prin împărțirea ultimelor două ecuații și integrare, rezultă expresia generală a traiectoriei razei de lumină în medii cu simetrie sferică

$$\theta = \int \frac{Adr}{r\sqrt{r^2 n^2(r) - A^2}}. \tag{361}$$

Aceasta este o integrală de forma discutată mai înainte, ecuația (351), în care $B = 0$. Astfel, domeniul valorilor r care permit propagarea razelor de lumină rezultă din condiția ca integrandul să fie real, adică

$$n^2(r) \geq \frac{A^2}{r^2}, \tag{362}$$

unde, membrul drept depinde de condițiile inițiale prin constanta A, ecuația (358), și scade monoton cu r. ***Punctele de întoarcere*** sau de ***reflexie totală***, $r_m$, sunt soluțiile ecuației din condiția (362). Evident, pentru aceste limite avem $dr/ds = 0$, cum rezultă din ecuația (360).

Pentru ilustrare, să considerăm mai întâi o distribuție a indicelui de refracție de forma

$$n^2 = a/r \ , \tag{363}$$

unde a (>0) este o constantă. În acest caz, integrala generală, ecuația (361), este de tipul

$$\theta = \int \frac{A dr}{r\sqrt{ar - A^2}} \ , \tag{364}$$

și ecuația traiectoriei se scrie

$$\theta(r) - \alpha = \arccos(\frac{2A^2}{ar} - 1), \tag{365}$$

sau

$$\frac{2A^2}{ar} = 1 + \cos(\theta - \alpha), \tag{366}$$

unde $\alpha$ este constanta de integrare care se determină din condițiile inițiale $r_0, \theta_0$. Ecuația (366) este ecuația polară a unei parabole de parametru $p = 2r_m = 2A^2/a$ (fig.89). Deci ***punctul de întoarcere*** sau ***de reflexie totală*** are coordonatele $r_m = A^2/a$, $\theta_m = \alpha$. Evident, distanța periheliului $r_m$ satisface (sau poate fi determinată direct din) condiția generală (362).

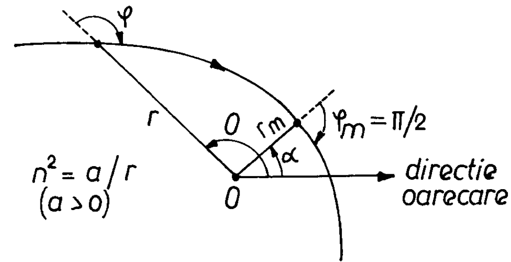



**Fig.89.** Punct de întoarcere ($r_m$ ) în structura $n^2$=a/r.

Un exemplu remarcabil de simetrie sferică, considerat pentru prima dată de către Maxwell (1854), este distribuția denumită ***ochi de pește (fish-eye)***, care are forma

$$n = \frac{n_0}{1 + (r/a)^2}, \tag{367}$$

unde $n_0$ și a sunt constante. În acest caz, integrala generală, ecuația (361), devine

$$\theta = \int \frac{C d(\rho - \frac{1}{\rho})}{\sqrt{1 - 4C^2 - C^2(\rho - \frac{1}{\rho})^2}}, \tag{368}$$

unde am notat

$$\rho = \frac{r}{a}, \quad C = \frac{A}{an_0}. \tag{369}$$

Ecuația traiectoriei are deci expresia

$$\theta - \alpha = \arcsin\left[\frac{C}{\sqrt{1 - 4C^2}}\left(\rho - \frac{1}{\rho}\right)\right], \tag{370}$$

unde $\alpha$ este constanta de integrare care se determină din condițiile inițiale $r_0, \theta_0$. Inversând această relație și revenind la variabila r, rezultă ecuația polară a traiectoriei în forma

$$\frac{r^2 - a^2}{r\sin(\theta - \alpha)} = 2b, \qquad (371)$$

unde constanta b are expresia

$$b = \frac{a\sqrt{1-4C^2}}{2C} = \frac{a}{2A}\sqrt{a^2 n_0^2 - 4A^2}\,. \qquad (372)$$

Scriind mai departe ecuația (371) în coordonate carteziene $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, rezultă

$$(x + b\sin\alpha)^2 + (y - b\cos\alpha)^2 = a^2 + b^2, \qquad (373)$$

adică traiectoriile sunt cercuri cu raza $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ și cu centrul în punctul de coordonate $x_c = -b\sin\alpha$, $y_c = b\cos\alpha$ (fig.90). În cazul în care $a^2 n_0^2 = 4A^2$ avem $b = 0$; ecuația (372), și traiectoria reprezintă cercul de rază minimă $r = a$ în jurul centrului de simetrie O. În general, cum rezultă din ecuația polară, ecuația (371), orice traiectorie intersectează cercul fix $r = a$ în puncte diametral opuse $r = a$, $\theta = \alpha$ și $r = a$, $\theta = \alpha + \pi$ (fig.90).

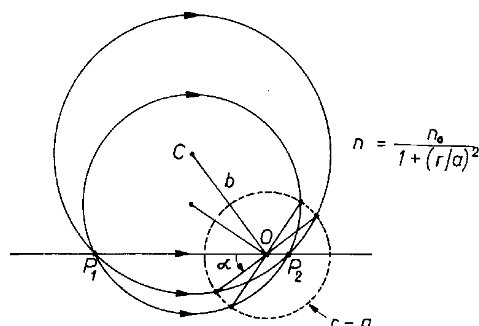



**Fig.90.** Ochiul de pește al lui Maxwell (două traiectorii circulare).

O proprietate remarcabilă a distribuției "ochi de pește" constă în aceea că toate razele de lumină care pornesc dintr-o sursă punctuală oarecare $P_1(r_1, \theta_1)$ se întâlnesc din nou într-un punct $P_2(r_2, \theta_2)$, unde coordonatele celor două puncte sunt legate prin relațiile simetrice

$$r_1 r_2 = a^2, \qquad \theta_2 = \theta_1 + \pi. \qquad (374)$$

Pentru a demonstra aceasta, să scriem familia (371), de parametru $\alpha$, a traiectoriilor care trec prin punctul $P_1(r_1, \theta_1)$, adică

$$\frac{r^2 - a^2}{r\sin(\theta - \alpha)} = \frac{r_1^2 - a^2}{r_1 \sin(\theta_1 - \alpha)}. \qquad (375)$$

Se verifică imediat că, indiferent de valoarea parametrului $\alpha$, toate traiectoriile acestei familii trec și prin punctul $P_2(r_2, \theta_2)$ de coordonate polare date de ecuația (374). Cu alte cuvinte, punctele $P_1$, $P_2$, conjugate prin relațiile (374) se găsesc pe dreapta care trece prin centrul de simetrie O, și anume de o parte și de alta a acestuia, și la distanțele date de relația $r_1 r_2 = a^2$ (fig.90). Evident, această proprietate geometrică nu depinde de sensul de propagare a razelor de lumină astfel că, la fel de bine putem considera $P_2$ ca sursă punctuală de lumină și $P_1$ ca punct de focalizare. Distribuția "ochi de pește" reprezintă un exemplu clasic de ***instrument***

***optic perfect*** în sensul că un fascicul conic (homocentric) de raze de lumină care iese dintr-un punct obiect oarecare din spațiu este transformat într-un fascicul conic care converge în punctul imagine corespunzător.

Un alt exemplu interesant de distribuție sferică este ***lentila lui Luneburg***, care constă dintr-o sferă neomogenă de rază unitate (rază relativă) și indice de refracție $n = \sqrt{2 - r^2}$ (pentru $r \le 1$), aflată în aer ($n = 1$ pentru $r > 1$) - fig.91. Deoarece la $r = 1$ avem $n = 1$ (atât în exterior cât și în interior), nici-o rază incidentă nu va suferi refracție propriu-zisă la suprafața lentilei; refracția are loc, în mod continuu, numai în interiorul lentilei (pentru $r < 1$).

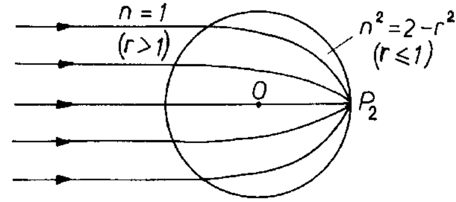


**Fig.91.** Lentila lui Luneburg.

În cazul acestui tip de lentilă relația (361) ne dă

$$d\theta = \frac{A dr}{r\sqrt{r^2(2-r^2)-A^2}} \quad . \tag{376}$$

Dacă notăm cu $i$ unghiul de incidență pe lentilă (la $r = 1$, $n = 1$) al unei raze de lumină ce vine de la $P_1$ (situat la infinit) și ținem cont de relația (358), găsim că $A = \sin i$ și astfel

$$d\theta = \frac{\sin i \, dr}{r\sqrt{\cos^2 i-(r^2-1)^2}} \quad . \tag{377}$$

Prin integrare, cu condiția inițială $\theta = i$, $r = 1$, obținem traiectoria

$$\theta - i = \frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{r^2-\sin^2 i}{r^2\cos i}\right) - \frac{1}{2}\arcsin(\cos i) \quad , \tag{378}$$

sau

$$\frac{1}{r^2} = \frac{1}{\sin^2 i}[1 - \cos i \cdot \sin(2\theta + \arcsin(\cos i))] \quad . \tag{379}$$

De aici rezultă că, ***pentru orice*** i, la $\theta = \pi$ *avem* $r = 1$, ceea ce înseamnă o ***focalizare perfectă*** în punctul $P_2$ de pe suprafața sferei, așa cum se arată în fig.91. În consecință, imaginea unui obiect întins, situat la distanță mare față de lentilă, se va forma pe o calotă sferică de rază unitate. Astfel de lentile din masă plastică poroasă și-au găsit aplicații în domeniul microundelor. Ele diferă de lentilele obișnuite din domeniul optic la care refracția are loc numai la suprafață.

O distribuție continuă mai generală a indicelui de refracție și care permite realizarea stigmatismului are forma

$$n^2 r^2 = n^{1/p}(2 - n^{1/p}), \qquad (r \le 1), \tag{380}$$

unde $p > 0$ . În particular, pentru $p = 1/2$, rezultă distribuția din lentila lui Luneburg. Astfel de distribuții prezintă interes în domeniul undelor electromagnetice scurte (decimetrice și

centimetrice) pentru construcția sistemelor proiectoare, care transformă un fascicul homocentric provenind de la o sursă punctuală într-un fascicul paralel (unde plane), dar și în domeniul optic unde, în variantele lor bidimensionale, sunt utilizate ca lentile în circuitele optice integrate. Pentru ilustrare, în fig.92 este arătată o ***lentilă Luneburg bidimensională*** (văzută de sus), care transformă una în alta, fără nici o aberație, obiecte și imagini circulare concentrice.

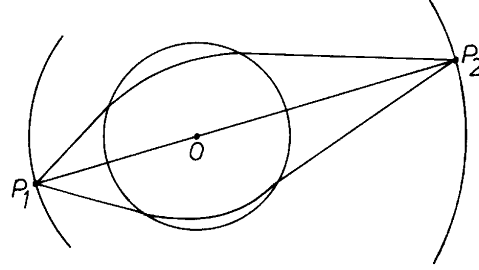


**Fig.92.** Lentila bidimensională a lui Luneburg și cercurile conjugate.

În exemplele de mai sus am considerat problema determinării traiectoriei $\theta(r)$ a razelor de lumină, ecuația (361), presupunând distribuția $n(r)$ dată. Desigur, problema se poate formula și invers și anume, impunând traiectoriile $\theta(r)$ ale razelor de lumină, să determinăm distribuția $n(r)$ din ecuația integrală, relația (361), a traiectoriei. De exemplu, să determinăm forma dependenței $n(r)$ a indicelui de refracție într-un mediu cu simetrie sferică, în așa fel ca traiectoria $r(\theta)$ a razei de lumină să fie o parabolă (conică cu excentricitatea $\varepsilon = 1$) cu ecuația

$$r = \frac{p}{1+\cos\theta} = \frac{p}{2\cos^2(\theta/2)} \quad , \quad p = \text{cunoscut}. \tag{381}$$

Din ecuația (361) găsim imediat

$$n(r) = \frac{A}{r}\left[1 + \left(\frac{1}{r}\frac{dr}{d\theta}\right)^2\right]^{1/2} \quad , \tag{382}$$

în care va trebui să înlocuim

$$\frac{1}{r}\frac{dr}{d\theta} = \sqrt{\frac{2r}{p} - 1} \quad . \tag{383}$$

Astfel obținem

$$n(r) = \frac{A\sqrt{2}}{\sqrt{pr}} \quad , \tag{384}$$

unde, în conformitate cu relația (358), $A = r_{\min} n(r_{\min})$ *cu* $r_{\min} = p/2$ . Cu ajutorul notației $a \equiv 2A^2/p$ , rezultatul obținut coincide cu dependența (363) analizată anterior.

Cititorului interesat de problematica abordată în acest capitol îi recomandăm, suplimentar, consultarea lucrărilor [16], [29], [45], [46], [54] și [95].

# ANEXA A

# MOMENTE DIN ISTORIA OPTICII GEOMETRICE

**circa 2000 î.e.n.** Cum rezultă din cercetările arheologice, încă de acum 4000 de ani ***egiptenii*** stăpâneau ***tehnica șlefuirii oglinzilor metalice*** din cupru, bronz, iar mai târziu din speculum, un aliaj din cupru bogat în cositor. O astfel de oglindă, în stare perfectă, datată la circa 1900 î.e.n., a fost găsită în apropierea **circa 1000 î.e.n.** piramidei lui Sesostris II în valea Nilului. Tot descoperirile arheologice dovedesc că ***lentilele rudimentare*** erau cunoscute deja acum 3000 - 3500 de ani. Prima mențiune scrisă despre o ***lentilă convergentă***, folosită pentru **424 î.e.n.** focalizarea razelor solare, se găsește în comedia ***Norii*** a lui ***Aristofan***, 424 î.e.n. (în care era vorba de un debitor care putea să distrugă astfel, de la distanță, dovada datoriei înregistrată pe o tăbliță de ceară).

Marii filozofi greci au speculat mult și au avansat ipoteze simple, care azi apar în parte stranii, în parte esențial corecte, cu privire la natura **500 î.e.n.** luminii și mecanismul vederii. Astfel, geometrul ***Pitagora*** (582 - 500 î.e.n.) credea că ochii emit raze de lumină ca niște faruri, cu ajutorul cărora "palpează" corpurile înconjurătoare conform unui principiu care prevestește radarul și sonarul din timpurile noastre (!); ***Empedocle*** (490-430 î.e.n.), autorul doctrinei materiei formate din particulele celor patru elemente (pământul, apa, aerul și focul; azi am spune solide, lichide, gaze și plasme), a avansat ipoteza că lumina se propagă prin spațiu cu viteză finită; ***Democrit*** **400 î.e.n.** (460-370 î.e.n.), părintele doctrinei atomiste, a presupus că senzația vizuală este cauzată de particule materiale infime (eudoli) emise de obiecte. ***Platon*** (427-347 î.e.n.), autor al celebrelor dialoguri și adept al "razelor oculare", face prima mențiune importantă cu privire la refracția luminii (în ***Republica***, versul 602, cartea X), iar ***Aristotel*** (384-322 î.e.n.), cea mai mare personalitate științifică a Antichității, obiectează împotriva razelor de lumină emise de ochi și avansează o ipoteză a eterului similară cu aceea din secolul al 19-lea.

Marele geometru grec, ***Euclid*** din Alexandria, circa 300 î.e.n., **300 î.e.n.** autorul operei matematice a Antichității - ***Elemente de geometrie***, 13 cărți (vezi ***Elements of Geometry***, trei volume, Dover Publications Inc., New York, 1956), a scris și prima carte mare de optică, ***Optica lui Euclid***, în care sunt expuse bazele teoriei perspectivei. Tot lui Euclid i se mai atribuie, uneori, și ***Catoptrica*** în care sunt studiate legile reflexiei, se enunță o serie de teoreme privind oglinzile plane și se descrie acțiunea focală a oglinzilor concave. Se deduce că, foarte probabil, Euclid cunoștea legile care stau și astăzi la baza Catoptricii și anume că: (1) în medii omogene lumina se propagă în linie dreaptă, (2) unghiurile de incidență și de reflexie sunt egale și (3) razele incidentă și reflectată se află într-un plan perpendicular pe suprafața oglinzii. Menționăm totuși că, spre deosebire de opera geometrică a lui Euclid, de o logică ireproșabilă, opera sa de optică geometrică prezintă și multe inexactități, pe care este îndoielnic să le fi făcut celebrul geometru.

**212 î.e.n.** ***Arhimede*** din Siracusa (287-212 î.e.n.), matematician și fizician grec, considerat adeseori cel mai mare geniu matematic al Antichității, fondatorul staticii și hidrostaticii, este învăluit de istoriografia romană în legenda după care acesta a folosit reflexia radiației solare, cu oglinzi înșirate de-a lungul țărmului, pentru a distruge flota romană care asedia Siracusa (212 î.e.n.).

**50 e.n.** ***Cleomede*** (circa 50 î.e.n.), astronom grec, descrie refracția luminii arătând că o rază care intră oblic într-un mediu mai dens se apropie de normală, respectiv într-un mediu mai puțin dens se îndepărtează. El afirmă că Soarele se poate vedea chiar sub linia orizontului grație refracției atmosferice. Menționează experiența cu "moneda din cupă", efectuată de Ctesibius la Universitatea din Alexandria pe la 50 î.e.n. Experiența constă în a pune o monedă pe fundul unei cupe goale și în a face moneda vizibilă pentru observatorii din jur prin umplerea cupei cu apă.

***Seneca, Lucius Annaeus*** (circa 4 î.e.n. - 65 e.n.) filozof și politician roman, a remarcat că un glob de sticlă umplut cu apă poate fi folosit pentru mărirea imaginilor. Este foarte posibil ca încă de atunci unii meșteșugari romani să fi folosit lentile măritoare pentru lucrări foarte fine. De asemenea, ***Caius Plinius Secundus*** sau ***Pliniu cel Bătrîn*** (23-79) știa că o sferă din sticlă expusă la Soare poate aprinde unele substanțe puse în focarul acesteia și semnalează aplicația pe care el a făcut-o cu astfel de sfere pentru a cauteriza rănile. Cunoscutul naturalist roman (o enciclopedie de istorie naturală de 37 de cărți) a murit observând de aproape o erupție a vulcanului Vezuviu (79 e.n.).

**50 e.n.** ***Hero (Heron)*** din Alexandria (probabil sec.I), matematician și inventator grec, un mare experimentator, este cunoscut mai ales pentru mașinile și dispozitivele sale funcționând pe bază de jet de apă, vapori sau aer comprimat. ***Catoptrica lui Heron*** este una dintre cele mai interesante cărți de optică ale Antichității. În această carte Heron sesizează o rațiune mai profundă pentru legile catoptricii (vezi mai sus, la Euclid), postulând că ***razele de lumină se propagă de la un punct la altul pe drumul cel mai scurt***. Această aserțiune reprezintă prima formulare a unor legi naturale cu ajutorul unui principiu variațional. Ideea a fost reluată mai târziu de Fermat (1657), care a generalizat-o sub forma "principiului timpului minim" pentru a explica și legea refracției. În aceeași carte, ca un experimentator cu fantezie remarcabilă, Heron descrie și o mulțime de efecte amuzante sau de interes practic, obținute cu ajutorul oglinzilor plane și cilindrice.

**150** ***Ptolemeu, Claudius,*** din Alexandria (100-160), astronom, matematician și geograf grec, a rămas celebru prin opera sa ***Marea Sintaxă (Almagestum)*** și prin sistemul geometric ptolemeic - reprezentare geometrică, elaborată de Ptolemeu, în care mișcările aparente ale Soarelui, Lunii și planetelor, văzute de un observator terestru, sunt prezise cu grad mare de precizie (abateri de cel mult două grade de la poziția observată). Conform acestei reprezentări, mișcarea corpurilor cerești rezultă din compunerea unor mișcări circulare uniforme și anume o mișcare circulară pe un cerc mic (epiciclu), al cărui centru se deplasează pe un cerc excentric mare (deferent) în jurul Pământului (vezi S. Olariu, ***Geneza și evoluția reprezentărilor mecanicii clasice***, Ed. Științifică și Enciclopedică, București,

1987). Totodată, Ptolemeu a fost omul care avea cele mai întinse și aprofundate cunoștințe de optică din Antichitate și a scris unul din cele mai remarcabile tratate de optică, ***Optica lui Ptolemeu***. Mult timp considerată pierdută, și cunoscută numai prin citările autorilor din Evul Mediu, a fost în cele din urmă recuperată din manuscrisele latine, ***Ptolemaei opticorum sermones quinque***, traduse din arabă. Această lucrare cuprinde toate ramurile opticii cunoscute atunci, și anume vederea, reflexia pe oglinzi plane și concave, precum și refracția. Și, caz unic la antici, Ptolemeu face un studiu experimental serios al refracției luminii (din aer în apă și sticlă, și din sticlă în apă), descrie instrumentul de măsură (un disc circular cu marchere pentru măsurat cele două unghiuri) și lasă tabele cu datele experimentale ale unghiului de refracție în funcție de unghiul de incidență (din 10 în 10 grade de arc). În particular, datele pentru unghiurile de incidență de $50^o$ și $60^o$ sunt surprinzător de precise. Este clar că Ptolemeu putea să descopere legea exactă a refracției. Din nefericire, aceasta a rămas ascunsă până la Snell (1621) și Descartes (1637). Ptolemeu nu pomenește nici de separarea culorilor prin refracție (dispersia luminii), astfel că discutarea acestui fenomen avea să-l aștepte pe Newton (1672). În schimb, interesul său de astronom l-a împins să cunoască mai mult despre refracția astronomică. Astfel, Ptolemeu știa că numai pentru o stea la zenit pozițiile aparentă și reală coincid dar că, în restul cerului, refracția atmosferică face ca înălțimea aparentă să fie mai mare decât înălțimea reală, și aceasta cu atât mai mult cu cât corpurile cerești se află mai aproape de orizont. Cu alte cuvinte, el știa că razele de lumină care intră oblic în atmosferă se curbează înspre Pământ.

**150** Acestea erau cunoștințele anticilor în optică. Deși nu sunt impresionante, ele depășeau cu mult pe cele din alte ramuri ale fizicii acelor vremuri.

**1025** Abu Ali Al-Hasen ibn Al-Hasan ibn Al-Haytam sau, pe scurt, ***Alhazen***, (circa 965-1039), matematician și fizician arab, cel mai mare optician al Evului Mediu timpuriu, autor al tratatului de optică ***Kitab Al Manazir***, a adus contribuții de valoare în optica geometrică și fiziologică. Astfel, Alhazen a extins cercetările de reflexie a luminii la suprafețe conice, concave și convexe, a formulat problema poziției punctului de incidență a unei raze de lumină pentru pozițiile ochiului și a punctului luminos date (problema lui Alhazen) și a precizat legea de reflexie, stabilind că razele incidentă, reflectată și normala la suprafața oglinzii în punctul de incidență se află în același plan. A extins această precizare și pentru legea de refracție (experiențele sale sunt folosite și astăzi pentru ilustrare), a remarcat că afirmația lui Ptolemeu, și anume că unghiurile de incidență și de refracție sunt proporționale, nu este valabilă decât pentru unghiuri suficient de mici, dar a ratat și el ocazia de a descoperi forma matematică exactă a acestei legi, deși matematicienii arabi elaboraseră deja conceptul de sinus al unghiurilor. Alhazen compromite definitiv ipoteza "razelor oculare", moștenită de la Pitagora și Platon și încă prezentă în ***Optica*** lui Ptolemeu, prin argumente bazate de fapte, și anume că vederea este influențată drastic de condițiile externe cum sunt iluminarea, respectiv strălucirea, culoarea și dimensiunile aparente ale obiectelor. Singura explicație simplă constă, deci, în a admite că vederea este cauzată de ceva care se propagă de la obiect la ochi. Din

constatarea că efectul unei străluciri intense este simțit chiar după închiderea ochilor, Alhazen a tras concluzia că lumina provoacă anumite reacții în interiorul ochiului. Pentru a înțelege mecanismul vederii, el a făcut un studiu
**1025** anatomic detaliat al ochiului uman, descriind corect cornea, coroida, irisul, cristalinul, umorile și retina cu structura ei nervoasă. Această descriere a rămas clasică. Chiar și termenul de lentilă provine de la traducerea în latină prin ***lens*** a ceea ce Alhazen a denumit în arabă ***adasa***, adică ***bob***, atunci când a descris cristalinul. Mai apoi, Alhazen a construit un model fizic simplu al ochiului, celebra cameră obscură, denumită astăzi cameră pinhole, cu ajutorul căreia a efectuat numeroase experiențe. Inversarea imaginii în camera obscură l-a făcut să creadă însă, prin comparație cu ochiul, că nu retina, ci prima suprafață a cristalinului simte imaginea. Va mai trece mult timp până când Kepler (1600) își va da seama că totuși, retina reprezintă stratul fotosensibil și că îndreptarea imaginii răsturnate reprezintă un efect fiziologic. Alhazen a mai folosit camera obscură, ca pe un veritabil precursor al camerei fotografice, pentru a studia eclipsele solare. Opera marelui savant arab a fost
**1025** tradusă în limba latină în ***Opticae Thesaurus Alhazeni*** și a avut o influență profundă asupra lui Robert Grosseteste, Roger Bacon, Witelo, Leonardo da Vinci, Johannes Kepler și Isaac Newton.

**1200** ***Grosseteste, Robert*** (1168-1253), filozof britanic, primul rector al Universității din Oxford, este unul dintre pionierii europeni ai metodelor experimentale și deductive. A scris despre mișcare, căldură, sunet și lumină, a făcut experiențe cu oglinzi și lentile și a considerat optica fundamentul științelor.

**1270** ***Bacon, Roger*** (1214-1294), filozof englez, a adunat toate lucrările sale de optică în ***Opus Majus*** (1267). Dintre acestea, merită a fi amintite: stabilirea exactă a focarului oglinzii sferice concave, descrierea aberației de sfericitate și recomandarea de a construi oglinzi parabolice. Roger Bacon era un om de mare erudiție, supranumit de contemporanii săi ***Doctor mirabilis***, dotat cu spirit original și cu geniul invenției, care l-ar fi dus poate la descoperiri importante, dacă ar fi trăit într-o epocă mai luminată și în condiții mai favorabile. Fapt este că operele sale sunt pline de proiecte pe care nu le-a realizat niciodată (transport rutier și pe mare, zborul aerian, explorări submarine, remedii cu substanțe chimice în medicină, chiar și praful de pușcă inventat mult mai înainte !). În particular, în optică a intuit posibilitatea construcției lupei și lunetei, a măsurat unghiul curcubeului, dar scrierile sale sunt atât de vagi și de schematice încât este imposibil să i se atribuie paternitate sigură pentru vreo invenție. Cu toate acestea, Roger Bacon este considerat un precursor al științelor moderne datorită interesului său foarte larg pentru științe și convingerii sale deschise și ferme că o cunoaștere utilă nu se câștigă prin speculații nefondate ci numai prin elucidarea faptelor pe bazele solide ale observației, experimentului și raționamentului matematic.

**1274** ***Witelo***, lat. Vitellius (1220-?), fizician și filozof polonez, a studiat în Italia (1269). Prin cartea sa de optică (circa 1274), foarte voluminoasă, dar cu puține noutăți, face, de fapt, o legătură cu optica greco-arabă, prin aceea că readuce în atenție tot ce au lăsat anticii și Alhazen în optică. Din nefericire, Witelo a devenit până la urmă, mai celebru prin erorile sale privind determinările experimentale ale unghiurilor de refracție a luminii în trecerile

dintre aer, sticlă și apă și care conțin date imposibile (fiind în contradicție cu fenomenul, încă necunoscut atunci, al reflexiei totale). Este posibil ca tocmai aceste date "noi" să-l fi derutat mai târziu pe Kepler (1611), împiedicându-l pe acesta să descopere, în fine, legea exactă a refracției. Am fi nedrepți dacă nu am recunoaște meritele lui Witelo, începând cu însăși cartea de optică pe care a dat-o europenilor. El cunoștea empiric dispersia, care însoțește întotdeauna refracția luminii, a făcut remarca naturală că, în refracție, cele două unghiuri rămân aceleași pentru ambele sensuri de propagare, a observat că la reflexie-refracție o parte din lumină se pierde, a contribuit la psihologia vederii și a ajuns foarte aproape de înțelegerea fenomenului curcubeului.

**1285** ***Degli Armati, Salvino*** (?-1317), nobil florentin, conform unui epitaf din Florența, pare să fi fost inventatorul ***ochelarilor***. De fapt inventatorii ochelarilor sunt cufundați în mister și, probabil, nu au avut nici o legătură cu problemele teoretice ci, mai degrabă, cu practica și hazardul. Datarea invenției în ultima treime din secolul 13 este confirmată de dicționarul Academiei della Crusca, în care este indicat anul invenției ca 1285, și de un manuscris vechi din 1299. Primul portret al unui om care poartă ochelari a fost pictat de ***Tomasso di Medina*** (1352). Inițial erau folosite numai lentile convergente, pentru corelarea presbitismului.Referiri cu privire la folosirea lentilelor divergente, pentru corectarea miopiei, nu există decât începând din a doua jumătate a secolului 15.

**1485** ***Leonardo da Vinci*** (1452-1519), artist și om de știință italian, considerat cel mai mare observator al naturii din toate timpurile, a cărui pasiune pentru artă, pictură, sculptură, arhitectură sau muzică, l-a condus la vaste cercetări științifice și tehnice. A observat rezistența, compresibilitatea și greutatea aerului precum și zborul păsărilor și a proiectat planorul și parașuta. A studiat figurile formate de nisip pe plăci vibrante, undele staționare în lichide, frecarea, greutatea efectivă a corpurilor pe planul înclinat și paralelogramul forțelor, a proiectat canale, sisteme de irigații și construcții de artă, a inventat liftul și a cercetat distribuția tensiunilor în arcade, coloane și ziduri. A studiat capilaritatea și formarea picăturilor, și a comparat densitatea lichidelor prin echilibrarea lor într-un tub în formă de U. Cercetările și observațiile sale de anatomie umană au fost de o calitate inegalabilă. A studiat anatomia ochiului și a elaborat un model al acestuia (a presupus că razele de lumină îl parcurg de două ori pentru ca imaginea să fie dreaptă !), a remarcat fenomenul de difracție a luminii, a schițat un fotometru și o mașină de șlefuit oglinzi concave. Din păcate, cu excepția lucrării ***Trattato della pittura***, majoritatea notelor și schițelor acestui om de geniu au fost lăsate în manuscrise neorganizate care, în parte au fost pierdute, în parte au rămas practic necunoscute până târziu (Venturi, ***Essai sur les ouvrages de L. da Vinci, 1797).***

**1575** ***Maurolico, Francesco*** (1494-1575), geometru și optician italian, de origine arabă, cunoscut prin cartea sa bine scrisă de optică și intitulată ***Photismi (theoremata) de lumine et umbre*** (Veneția, 1575). El își depășește predecesorii, Alhazen și Witelo, prin aceea că nu mai plasează percepția imaginii pe sau în cristalin ci în spatele lui, asimilând funcționarea cristalinului cu aceea a unei lentile biconvexe și explicând, în acest fel, miopia și hipermetropia ochiului. Pentru a arăta cât de greu s-a ajuns la

înțelegerea funcționării ochiului, menționăm că Maurolicus încă nu a realizat faptul că pe retina din fundul ochiului se formează o imagine reală. El a mai observat, pentru prima dată, că razele de lumină care provin de la o sursă punctuală, au o suprafață înfășurătoare, denumită astăzi ***caustică***, pe care concentrarea luminii este maximă și a măsurat diametrele unghiulare ale arcelor curcubeului.

**1589** ***Porta, Giambattista della*** (1534-1615), naturalist italian, a scris una dintre cele mai "colorate" cărți ale timpului, ***Magiae naturalis libri XX***, 1589, tradusă apoi în cinci limbi (italiană, franceză, spaniolă, germană și arabă), un veritabil vade-mecum al epocii, amestec straniu de rețete utile și de mituri și legende preluate necritic, din sursele cele mai diverse și pe care autorul se abține să le citeze: de la cosmetică, parfumuri și distilare, grădinărit, gospodărie și îmbogățire, pirotehnie, metalurgie și pietre prețioase artificiale, până la astrologie, simpatie-antipatie și chiromanție. Abia în cartea a 17-a se ocupă de optică, unde sunt prezentate o mulțime de trucuri cu oglinzi, așa cum a făcut și Heron cu 1500 de ani înainte, dar și prima teorie exactă a oglinzilor multiple, prima descriere completă a camerei obscure, cu pinhole sau cu lentilă, comparația ochiului și a pupilei cu camera obscură și diafragmă, diverse combinații de lentile convergente și divergente, de unde și pretenția ulterioară a lui Porta de a fi inventat luneta.

Venise deci, în fine, momentul 1590-1610 al invențiilor telescopului și microscopului, realizate în mod empiric de opticienii olandezi ***Hans Lippershey, Jacob Adriaanszoon*** sau ***Hans*** și ***Zacharias Jansen*** și din interes științific de ***Galileo Galilei*** și ***Johannes Kepler***. Să vedem însă, mai înainte, stadiul observațiilor astronomice în pragul descoperirii telescopului de refracție (lunetei).

***Brahe, Tycho*** (1546-1601), astronom danez, a perfecționat până la limită arta observațiilor astronomice cu ochiul liber, folosind pentru aceasta dispozitive mecanice mari și precise. Astfel, de exemplu, cuadrantul lui Tycho Brahe avea o rază de aproape 2 metri și o precizie mai bună decât 5 secunde de arc. Pentru a avea o idee de această performanță, observăm că un om în București este văzut - în linie dreaptă din - Drobeta-Turnu Severin sub un unghi de o secundă de arc. Datele lui Tycho Brahe, de o precizie care uimește și astăzi, cu privire la pozițiile și mișcările stelelor, Soarelui, planetelor și Lunii, au fost publicate în ***Astronomiae instauratae mechanica***
**1598** (1598). Acestea au permis lui Kepler (***Astronomia nova,*** 1609) să descopere că orbitele planetare sunt elipse cu Soarele într-unul din focare și au stimulat studiile lui Römer, care au condus la determinarea vitezei luminii (1676).

În Olanda, ca și în Italia (lângă Veneția), era produsă sticlă de calitate pentru lentilele de ochelari. Dacă Olanda este indiscutabil țara în care
**1608** a fost inventată ***luneta***, nu este deloc clar cine anume a fost inventatorul. Conform arhivelor din Haga, prima cerere de brevet pentru acest instrument este datată la 20 octombrie 1608 și a fost înaintată de constructorul de lentile și ochelari ***Hans Lippershey*** (1587-1619), care însă a fost imediat contestat de colegii săi de breaslă ***Jacob Adriaanszoon*** și ***Hans*** și ***Zacharias Jansen*** (fiul său). În această confuzie, dreptul de brevet solicitat de Lippershey a fost refuzat. Fapt este că în 1609 lunetele olandeze se comercializau la Paris, Frankfurt, Londra, Milano și Padova. Nu este de mirare că, practic în același

timp, a fost inventat și ***microscopul compus***, atribuit lui ***Zacharias Jansen*** (1588-1632) și tatălui său deși, și în acest caz, au mai solicitat prioritatea și alții (George Huefnagel din Frankfurt și astronomul Francesco Fontana din

**1610** Napoli). Astfel, în jurul anului 1610 a fost materializată observația că imaginea obținută cu două lentile poate fi mult mai mare decât cea obținută cu una singură. Noul instrument optic de văzut la mare distanță - telescopul de refracție, s-a răspândit rapid în Europa, interesul deosebit al autorităților fiind lesne de ghicit iar impactul lui în știință fiind imediat, cum aveau să demonstreze de îndată Galilei și Kepler.

***Galilei, Galileo*** (1564-1642), astronom, matematician și fizician italian, profesor la universitățile din Pisa și Padova, prin descoperirile sale fundamentale în mecanică și astronomie, este considerat ca fondatorul științelor exacte și al metodei științifice moderne. Descrierea experiențelor sale și a raționamentelor matematice făcute pe această bază sunt comparabile cu cele făcute astăzi, cum ne putem convinge citind, cu mult folos, cartea sa ***Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze*** (Leida, 1638), tradusă în limba română de Victor Marian sub titlul ***Dialoguri asupra științelor noi***, Editura Academiei, 1961. Remarcăm, mai întâi, că modul în care Galilei a studiat mișcarea uniform accelerată a constituit un veritabil început al reprezentărilor diferențiale introduse mai târziu în fizică de Newton (1669). Dintre realizările sale în mecanică cităm descoperirea izocronismului oscilațiilor pendulului (1583), invenția balanței hidrostatice (1586), experiențele clasice și teoria cu privire la căderea greutăților și mișcarea proiectilelor (vezi cartea ***Dialoguri*** citată mai sus). Însă, renumele lui Galilei printre contemporanii săi este legat în primul rând de realizarea primelor ***lunete de interes practic*** (1609) și de descoperirile astronomice uimitoare

**1610** făcute cu acestea (începând cu nopțile de 7-15 ianuarie, 1610), prin care omenirea a deschis, în fine, ochii spre ceruri. Fapt este că Galilei a auzit pentru prima dată despre lunetele olandeze abia în mai 1609, pe când era profesor de matematică la Padova și nu se ocupase încă cu cercetări de optică. Aceste lunete, constând dintr-un obiectiv convergent și un ocular divergent, erau foarte rudimentare și nu depășeau o mărire de 3X. Galileo s-a ocupat de îndată să-și construiască singur propriile lunete, executând două lentile, una convexă și alta concavă, pe care le-a montat într-un tub de orgă, instrument prin perfecționarea căruia a ajuns repede la o mărire de 14X, de 20X și, în final, de 30X (de-a lungul vieții sale a realizat peste o sută). În august 1609, Galilei prezenta deja Senatului din Veneția o astfel de lunetă, mult mai puternică decât aceea pe care acesta o primise între timp din Olanda, iar din ianuarie 1610 și-a îndreptat lunetele spre cer, descoperind corpuri cerești nemaivăzute până atunci. A observat astfel cei patru sateliți principali ai lui Jupiter (trei în noaptea de 7 ianuarie, al patrulea apărând în noaptea de 13 ianuarie), un veritabil sistem copernican în miniatură (orbitele acestor sateliți se află în planul ecuatorial al lui Jupiter, având semiaxele de câteva diametre ale acestei planete și perioadele de revoluție în jurul ei de ordinul zilelor), a descoperit munții, văile și craterele lunare (deci suprafața Lunii nu era netedă cum presupuneau grecii antici), inelul lui Saturn (numită inițial ***planeta tricorporeum***), fazele planetei Venus, petele și rotația Soarelui și structura stelară a Căii Lactee (în dreptul căreia i-au apărut mii de stele, invizibile cu

ochiul liber). Primele astfel de observații le-a publicat în ***Nuncius sidereus***
1610 (Veneția, martie 1610), provocând o emoție extraordinară. Impactul științific
al acestor descoperiri, făcute de Galilei cu lunetele construite de el, și care au
revoluționat ideile oamenilor despre Univers, a fost imediat, cum se poate
ușor deduce din entuziasmul cu care un om de talia lui Christian Huygens
scrie despre ele în ***Dioptrica, de telescopiis***, 1653. De la lunetă (obiectiv de
distanță focală mare) până la microscop (obiectiv și ocular de distanță focală
mică) nu mai era decât un pas, pe care și Galilei l-a făcut (1610), odată cu
inventatorii olandezi, alăturându-se astfel precursorilor microscopului compus
modern. Sunt bine cunoscute nenorocirile pe care ignoranța și Inchiziția le-a
abătut asupra lui Galilei pentru descoperirile sale, dar flacăra rațiunii și a
științei nu mai putea fi stinsă, pentru că începuse deja secolul 17, al giganților
științei: Galilei, Kepler, Descartes, Pascal, Fermat, Newton, Leibniz și
Huygens.

***Kepler, Johannes*** (1571-1630), astronom german, asistent
(1600-1601) și apoi succesor al lui Tycho Brahe la observatorul din Praga.
Animat de pasiunea exactitudinii și folosind observațiile precise ale lui Tycho
Brahe, precum și multă răbdare și stăruință în calcule (pe care le-a reluat de
zeci și zeci de ori), Kepler a descoperit legile orbitelor planetare, enunțate în
1609 cartea sa ***Astronomia nova***, Praga, 1609, punând astfel capăt unei tradiții de
2000 de ani a reprezentărilor geometrice circulare (vezi S. Olariu, ***Geneza și
evoluția reprezentărilor mecanicii clasice***, Ed. Științifică și Enciclopedică,
București, 1987).

Nu același noroc l-a avut Kepler atunci când a folosit datele
experimentale eronate ale lui Witelo cu privire la unghiurile de refracție, de
unde rezultă cât de importantă este pentru cunoaștere precizia observațiilor și
a măsurătorilor. Astfel, în prima sa carte de optică, intitulată ***Ad Vitellionem
paralipomena, quibus astronomiae pars optica traditur,*** Frankfurt, 1604,
1604 Kepler încearcă și aproape reușește, să descopere legea exactă a refracției.
Pentru aceasta, Kepler a început prin a-și pune problema suprafețelor
carteziene (cu 33 de ani mai devreme decât Descartes în ***La Dioptrique***,
1637), și anume pentru cazul particular al unei suprafețe care să refracte un
fascicul paralel de lumină într-o imagine punctuală. Inspirat, a ales ca test o
suprafață hiperboloidală care, după cum știm, satisface condițiile legii exacte
de refracție dar, din nefericire, având încredere în tabelele lui Witelo, a
renunțat la problemă pentru că suprafața considerată nu satisfăcea datele
eronate ale acestuia, care exprimau o relație falsă între unghiurile de incidență
și de refracție.

Galilei era în corespondență cu Kepler, căruia i-a prezentat și o
lunetă construită de el (1610), cu ajutorul căreia tocmai deschisese era marilor
descoperiri astronomice. Stimulat de aceste succese, Kepler și-a reluat
cercetările de optică și a scris a doua sa carte în acest domeniu, intitulată
1611 ***Dioptrice***, Augsburg, 1611, în care dă un impuls important progresului unei
științe, a cărei parte teoretică era neglijată de prea multă vreme. Astfel, în
această lucrare, care conține optzeci de pagini și poate fi citită cu folos și
astăzi, pe baza unor considerații simple de geometrie elementară, Kepler
stabilește ***principiile fundamentale ale dioptricii*** în aproximația paraxială (în
care unghiurile de incidență și de refracție sunt proporționale), cu aplicații la

lentile subțiri și la dublete precum și la triplete de lentile subțiri. În acest context, Kepler elaborează ***prima teorie a telescoapelor de refracție*** (pentru care aproximația paraxială este excelentă întrucât, în practică, unghiul de incidență al razelor de lumină este întotdeauna foarte mic) și discută cinci tipuri de lunete și anume: (1) dubletul obiectiv convex/ocular concav (luneta olandeză sau ***luneta lui Galilei***), (2) dubletul obiectiv convex/ocular convex (sistem propus în propoziția 88 din ***Dioptrice*** și care poartă numele de ***luneta lui Kepler***), (3) tripletul un obiectiv convex/două oculare concave, (4) tripletul un obiectiv convex/două oculare convexe și (5) două obiective convexe/un ocular convex. Luneta (2) propusă aici de Kepler va fi realizată

**1613** efectiv câțiva ani mai târziu (circa 1613) de compatriotul său, astronomul ***Cristoph Scheiner*** (1575-1650) cu ajutorul căreia acesta va face timp de câțiva ani primele observații sistematice ale mișcării petelor solare (rezultate publicate în lucrarea ***Rosa Ursina***, 1626-1630). Spre deosebire de luneta lui Galilei, luneta lui Kepler s-a impus în observațiile astronomice (în care faptul că imaginea apare răsturnată nu prezintă nici un inconvenient) datorită câmpului unghiular relativ mare. În plus, luneta lui Kepler are avantajul esențial că imaginea intermediară este reală astfel că, montând în planul acesteia două fire reticulare cu punctul de intersecție pe axul lunetei sau un cerc divizat, luneta poate fi folosită pentru poziționări sau măsurători precise. Dintre oamenii care au mai jucat un rol important în istoria invenției lunetelor mai cităm aici pe ***Fontana*** și ***Schyrl*** (sau ***Schyrläus***). Astfel, astronomul italian ***Francesco Fontana*** (1580-1656), autorul lucrării ***Novae celestium terrestriumque rerum observationes***, 1646, primul observator al "canalelor" planetei Marte și, probabil, primul care a schimbat ocularul inițial concav al microscopului cu ocularul convex, susține, de asemenea, că el inventase luneta astronomică (luneta lui Kepler) încă din 1608. Mai bine stabilite sunt meritele astronomului ***Antoine - Marie Schyrläus de Rheita*** (1597-1660),

**1645** care este inventatorul ***lunetei terestre*** (1645), un cuadruplet de lentile convexe sau dublă lunetă astronomică, ce dă imagini drepte ale obiectelor. Tot de la el au mai rămas denumirile de ***obiectiv*** și de ***ocular*** iar de la ***Demiscianus***, un membru al Academiei dei Lincei, denumirile de ***telescop*** și de ***microscop***, în locul cuvintelor ***conspicilia, perspicilia, occhiali*** și ***occhialini***, folosite pe atunci.

În afară de deschiderea făcută în teoria dioptricii și a lunetelor, Kepler a stabilit și mersul corect al razelor de lumină prin ochi, arătând cum fiecare con de raze emis de punctele obiectului este refractat de cristalin și reunit în punctul imagine corespunzător, și anume pe retină; vederea reprezintă deci senzația stimulării retinale, iar analogia dintre ochi și camera obscură cu lentilă convergentă este corectă. Toată această ***teorie a vederii*** a fost elaborată de ***Kepler*** în prima sa carte de optică din 1604 și a fost curând confirmată experimental de ***Scheiner*** (constructorul mai sus amintit al lunetei lui Kepler) într-o lucrare remarcabilă, ***Oculus, hoc est fundamentum***

**1610** ***opticum***, 1610. Aici Scheiner arată că indicele de refracție al umorii apoase este egal cu cel al apei iar al cristalinului se apropie de cel al sticlei; tot aici el descrie celebra sa experiență cu ochiul de bou. Astfel, îndepărtând partea posterioară a scleroticii și coroidei și privind prin spatele ochiului ca prin obiectivul unei lunete, el a văzut foarte clar pe retina transparentă imaginea

obiectelor îndepărtate din fața ochiului. Mai târziu, în 1625, a făcut aceeași demonstrație cu ochiul uman. Prin această experiență, decisivă și foarte instructivă, se stabilește definitiv că ***sediul vederii se află în retină***. Totodată Scheiner a explicat și ***mecanismul adaptării ochiului*** prin modificarea formei cristalinului (obținută în experiența de mai sus printr-o ușoară presare a ochiului), cristalinul devenind mai convex (mai bombat) pentru obiectele apropiate și mai puțin convex (mai aplatizat) pentru obiectele îndepărtate. Ne apropiem de un moment culminant al opticii geometrice în care ***legea simplă și exactă a refracției***,

$$\frac{\sin i}{\sin r} = n \quad ,$$

iarăși "plutea în aer". Ea a mai plutit deasupra astronomului și matematicianului grec Ptolemeu (150), în jurul matematicianului și fizicianului arab Alhazen (1025), printre mâinile fizicianului polonez Witelo (1274), cum am arătat la timpul potrivit. Acum se oferea singură chiar marelui descoperitor de legi, Kepler, în forma necesității presante de a înțelege, în fine, funcționarea realizărilor chinuite ale empiricului, ochelarii, microscopul și luneta. Pentru a fi descoperită, nu trebuia decât să fie măsurate cu suficientă precizie ***două unghiuri***: unghiul de incidență $i$ și unghiul de
**1611** refracție $r$. Și Kepler a refăcut aceste măsurători (***Dioptrice***, 1611), dar a ajuns numai la rezultatul, moștenit încă de la Ptolemeu, că, pentru unghiuri de incidență care nu depășesc circa $30^o$, se poate scrie aproximativ $i/r = n$ unde, pentru trecerea aer-sticlă, $n = 3/2$. A descoperit însă, în plus, ***unghiul critic de reflexie totală***, care pentru reflexia sticlă-aer este de circa $42^o$, punct de la care datele eronate ale lui Witelo erau în flagrantă contradicție cu experiența. Kepler, însă, nu și-a mai amintit de frumoasa problemă pe care și-o pusese cu șapte ani mai înainte, în prima sa carte de optică, din 1604. Și, astfel, nici Kepler nu a avut fericirea de a descoperi veritabila lege a refracției, în ciuda șansei pe care a avut-o, ceea ce apare uimitor pentru un savant de talia lui.

Dar, timpul nu mai avea răbdare și capricioasa lege s-a scris atunci
**1621** singură (și, în esență, fără alte mijloace decât cele cunoscute de aproape 1500
**1637** de ani) prin mâinile lui ***Snell*** (circa 1621) în forma cosec $r$/cosec $i = n$ și prin mâinile lui Descartes (1637) în forma $\sin i / \sin r = n$. Astfel, în fig.A.1, făcută în planul razelor incidentă AI și refractată IB, corespunzând trecerii aer-sticlă ($n = 1,5$), sunt ilustrate ambele "reprezentări" ale legii, și anume cea a lui Snell, care a scris $IB/IE = n$, și cea a lui Descartes, care a scris $IC/ID = n$.

***Snell, Willebrord van Roijen, lat. Snellius*** (1591-1626), matematician olandez, profesor la Leiden, cunoscut prin lucrările sale de trigonometrie sferică și triangulație, a scris și o lucrare de optică în care expune legea de refracție în forma raportului de cosecante, valoarea acestui raport
**1621** pentru refracția aer-apă fiind corect dată prin $IB/IE = n = 4/3$. Este plauzibil să presupunem că Snell a fost condus la această lege

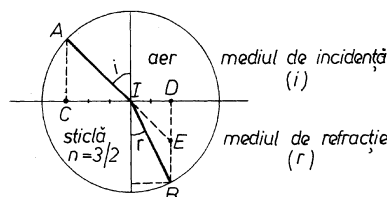


**Fig.A.1.** Legea refracției.

pe baza unor măsurători (mai precise) de unghiuri și a exprimat-o în această formă inspirându-se din experiența lui ***Ctesibius*** (50 î.e.n.) cu "moneda din cupă" (ridicarea aparentă a fundului unui vas umplut cu apă). Fapt este că nimeni nu știe cum a gândit și cum a stabilit Snell, dintr-o singură "lovitură", legea care deschide ușa opticii moderne, pentru că lucrarea lui de optică nu a fost publicată niciodată. Ar fi, desigur, interesant de imaginat scenariul devenirii noastre științifice și tehnologice dacă această ușă ar fi fost deschisă de Ptolemeu, de Alhazen, sau măcar de Witelo. Cum remarca Huygens, se pare că Snell nu și-a dat prea bine seama de importanța descoperirii sale. Din fericire, Huygens, care a văzut manuscrisul lucrării (ca și Isaac Voss, la care ne vom referi mai departe), l-a citat corespunzător în prima sa carte de optică, ***Dioptrica*** (1653).

***Descartes, René du Perron, lat. Cartesius, Renatus*** (1596-1650), matematician francez, fondatorul geometriei analitice, a scris și o frumoasă
**1637** carte de optică, ***La Dioptrique***, 1637, în care exprimă legea exactă a refracției în forma actuală a raportului de sinuși. Modul în care Descartes încearcă să explice această lege pe baza unei analogii mecanice ad hoc, de refracție a unor mici globule rotitoare, reprezintă însă o altă problemă. Astfel, în esență, el presupune, așa cum va face și Newton curând, că lumina constă din particule și explică refracția (ca și reflexia) prin forța normală care se exercită asupra acestora la suprafața de separare. În consecință, viteza tangențială a particulelor de lumină rămâne neschimbată, adică $V_i \sin i = V_r \sin r$ , de unde rezultă legea de refracție în forma

**1637**
$$\frac{\sin i}{\sin r} = \frac{V_r}{V_i} = n.$$

Această ecuație implică faptul că, la trecerea într-un mediu mai dens ($i > r$), viteza particulelor de lumină crește ($V_r > V_i$) , și vice-versa, ceea ce pare să contrazică bunul simț, dar la critica ***modelului corpuscular al luminii*** vom reveni ceva mai departe, împreună cu Fermat. Deocamdată, pe baza legii exacte de refracție, în capitolul opt al cărții sale ***La Dioptrique*** rezolvă cu strălucire problema în care eșuase Kepler în 1604, descriind suprafețele (denumite de atunci ***suprafețe carteziene*** sau ***ovale Descartes***) care asigură, prin definiție, stigmatismul riguros pentru o pereche de puncte, un caz particular important reprezentându-l suprafețele cu secțiune conică. Cum am arătat la locul potrivit, acestea au găsit un larg câmp de aplicații în construcția telescoapelor de reflexie și a lentilelor asferice. Este remarcabil faptul că Descartes a propus folosirea lentilelor hiperbolice pentru perfecționarea lunetelor și a proiectat o mașină de șlefuit astfel de profile, cu ajutorul căreia opticianul Ferrier din Paris a realizat încă de atunci ***prima lentilă hiperbolică convexă***. Și ***lentila cristalinului*** a format obiectul cercetărilor lui Descartes, care a făcut numeroase disecții anatomice ale ochiului, confirmând concluzia lui Kepler, că retina este sediul fotoreceptor al imaginii, și experiențele lui Scheiner făcute cu ochiul de bou și cu ochiul uman; în plus, el bomba cristalinul ochiului preparat în prealabil (alungire prin presare ușoară), observând că pe retina transparentă se formează atunci imaginea clară a obiectelor mai apropiate, fapt ce lămurește definitiv ***mecanismul acomodării ochiului***.

În fine, menționăm contribuția strălucită a lui Descartes în elaborarea teoriei geometrice cantitative a ***curcubeului*** (***Les Météores***,

1637 1637), cel mai frecvent și grandios fenomen optic natural, produs de refracția luminii solare în picăturile de ploaie, cum este ilustrat în figura A.2. Desigur, despre acest fenomen s-a scris încă din Antichitate (Aristotel, 350 î.e.n.; Seneca, 50 e.n.), dar de abia mult mai târziu Witelo (1274) încearcă să-l explice prin refracție și, în fine, ***Dietrich din Freiberg, lat. Theodoricus Teutonicus de***
1311 ***Vriberg***, în lucrarea ***De luce et ejus origine, de coloribus, de iride et radialibus impressionibus*** (1311), propune explicația calitativă corectă a curcubeului prin două refracții ale razelor de lumină solară în picăturile sferice de ploaie, și anume cu o singură reflexie intermediară pentru arcul principal (interior) intens și cu două reflexii intermediare pentru arcul secundar (exterior) mai slab (deoarece intensitatea luminii scade după fiecare reflexie). Din nefericire, această lucrare, remarcabilă pentru secolul 14, a rămas ascunsă într-o mânăstire și, apoi, în biblioteca publică a orașului Basel, necunoscută timp de secole, până când ***Giovani Battista Venturi*** (1746-1822), fizicianul italian cunoscut prin tratatele sale de hidraulică (același care a deblocat din manuscrisele care au mai rămas și opera științifică a lui Leonardo da Vinci în 1797), a pus-o în circulație prin lucrarea sa ***Commentari sopra la storia e la teoria dell'opttica***, Bologna, 1814. Și așa s-a întâmplat că Maurolicus (1575), care a și măsurat unghiul dintre razele solare incidente și razele emergente ($\varphi_1 = 40^o - 42^o$ pentru arcul principal și $\varphi_2 = 50^o - 53^o$ pentru arcul secundar), a eșuat în încercarea sa de a explica fenomenul iar ***Marcus Antonius de Dominis*** (1566-1624), în lucrarea ***De radiis visus et lucis in perspectivis et iride***, publicată în 1611 la Veneția, a demonstrat experimental (simulând curcubeul prin similitudine cu ajutorul unor sfere umplute cu apă și iluminate convenabil de Soare), că mersul razelor de lumină intuit de Dietrich din Freiberg în 1311 este valabil. Nu se știe dacă de Dominis văzuse lucrarea lui Dietrich sau dacă Descartes avusese cunoștință despre cei doi înaintași, dar Descartes (***Les Météores***, 1637) a făcut și el experiența cu baloanele sferice de sticlă umplute cu apă și este, cu siguranță, primul care a folosit legea exactă a refracției pentru a trasa mersul razelor de lumină ilustrat în figură. Spre deosebire însă de această figură,

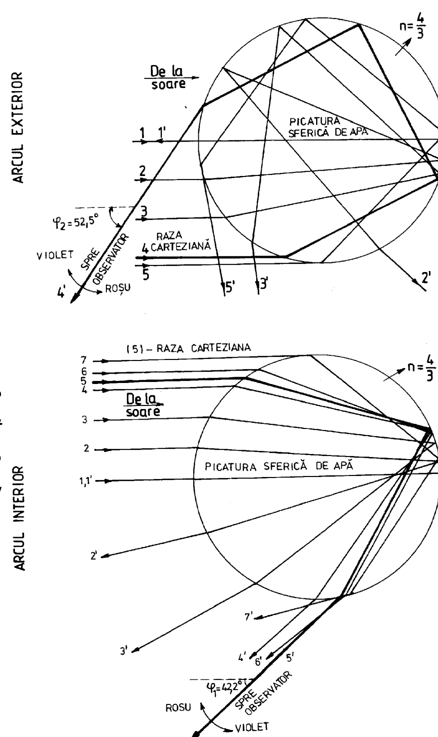


**Fig.A.2.**Producerea curcubeului în teoria lui Descartes.

trasată pentru $n = 4/3$ doar prin câteva raze, Descartes a calculat cu mâna mersul a 10000 (!) de raze pentru $n = 250/187 \approx 1,3369$, obținând unghiurile de deviație extremă $\varphi_1 = 41,5^o$ pentru arcul principal și $\varphi_2 = 51,9^o$ pentru arcul secundar. Evident, numai în vecinătatea acestor unghiuri razele emergente constituie fascicule paralele și contribuie efectiv la realizarea celor două arce ale curcubeului pentru un observator îndepărtat*. Mai departe, însă, Descartes nu a putut să explice culorile curcubeului și anume de ce culorile, care se succed de la violet (V) spre roșu (R), sunt etalate în sensuri opuse în cele două arce (vezi figura), dar edificiul principal al teoriei era deja construit (teoria arcelor albe sau fără culoare). Explicarea culorilor curcubeului va fi făcută de Newton care, prin frumoasele sale experiențe cu prisme de sticlă, va descoperi că lumina albă este compusă dintr-un mare număr de raze colorate

**1704** de refringibilitate diferită (***Opticks***, London, 1704, tradusă în limba română de prof. Victor Marian sub titlul ***Optica,*** Ed. Academiei Române, București, 1970, unde teoria lui Newton a curcubeului se află la paginile 110-116). Teoria lui Newton nu reprezintă, de fapt, decât o simplă extensie a teoriei lui Descartes și anume o aplicație a acesteia pentru fiecare culoare din lumina albă, cum rezultă din tabelul următor (date calculate de Newton):

| | | ***arc principal*** | ***arc secundar*** |
|---|---|---|---|
| ***Violet*** | $n = 109/81 \cong 1,3457$ | $40^o 17'$ | $54^o 7'$ |
| ***Roșu*** | $n = 108/81 \cong 1,3333$ | $42^o 2'$ | $50^o 57'$. |

Și astfel Descartes și Newton, cu ajutorul legii exacte de refracție, au explicat cantitativ trăsăturile principale ale fascinantului fenomen al curcubeului. Este interesant de amintit în acest context încă un nume uitat al istoriei, ***Johannes Marcus Marci de Kronland*** (1595-1667), care în cartea sa dedicată curcubeului ***"Thaumantias Iris, liber de arcu coelesti, deque colorum apparentium natura, ortu et causis",*** publicată la Praga în 1648, a făcut pentru prima dată legătura dintre culoare și deviația produsă prin refracție, din observațiile spectrului luminii albe (iris trigonia) generat de o prismă triunghiulară (trigonum) plasată în fața deschiderii unei camere întunecoase. Contribuția lui Marci a fost remarcată însă abia după 300 de ani de la moartea sa (Războiul de 30 de ani a împiedicat circulația de idei între Europa centrală și cea de vest).

Chestiunea priorității în descoperirea legii de refracție a fost mult discutată în literatură, chiar până în zilele noastre. Ea a început prin bănuiala

---

* Problema lui Descartes a picăturii sferice se rezolvă ușor pe cale analitică, prin metoda deviației maxime sau minime. Astfel, notând cu i unghiul de incidență, cu r unghiul de refracție și cu k numărul de reflexii interne, din considerații geometrice elementare rezultă unghiul $\phi = 2(i - r) + k(\pi - 2r)$ dintre razele solare și razele emergente, respectiv unghiul de observare $\varphi = \pi - \phi$. Folosind legea de refracție $\sin i = n \sin r$, respectiv $\cos i\, di = n \cos r\, dr$, din condiția de deviație extremă $d\varphi/di = 0$ rezultă

$$\cos i = \sqrt{\frac{n^2-1}{(k+1)^2-1}}$$

Astfel, de exemplu, pentru $n = 4/3$ și $k = 1$ obținem $i_1 = 59,38^o$, $r_1 = 40,2^o$, $\phi_1 = 137,97^o$, deci $\varphi_1 = 42,2^o$. În mod similar, pentru $k = 2$, rezultă $\varphi_2 = 52,5^o$.

lui Christian Huygens și prin atacul violent al lui Isaac Voss, ambii compatrioți cu Snell, că Descartes ar fi văzut mai înainte manuscrisul acestuia ("quae et nos vidimus aliquando et Cartesium vidisse accepimus, ut hinc fortasse mensuram illam quae in sinibus consistit elicuerit"*, Huygens,
1653 *Dioptrica*, 1653), respectiv că ar fi furat legea lui Snell, inventând ad hoc teoria cu globulele de lumină pentru a masca plagiatul (Vossius, *De lucis natura et proprietate*, 1662). Pare straniu că aceste afirmații au apărut abia la trei ani, respectiv la doisprezece ani, după moartea lui Descartes. Este adevărat că Descartes a călătorit foarte mult prin Europa și că a fost timp de 20 de ani rezident permanent în Olanda (1629-1649), unde a locuit în 13 orașe, printre care și în Leida (în 1630), orașul în care trăise Snell. Studii mai noi cu privire la această controversă (P. Kramer, *Abhandlungen zur Geschichte der Mathematik*, No.4, pp. 233-278, Teubner, Leipzig, 1882; H. Boegehold, *Keplers Gedanken über Brechungsgesetz und ihre, Einwirkung auf Snell und Descartes,* Ber . naturwiss, Ver. Regensburg, **19**, 150 (1928-30); M. Herzberger *Optics from Euclid to Huygens*, Applied Optics, **5**, 1383 (1966)) au descoperit însă în scrisorile lui Descartes că acesta se preocupa de lentila asferică plano-hiperbolică încă din 1627. Cum o astfel de lentilă focalizează stigmatic imaginea unui obiect îndepărtat tocmai pentru că suprafața ei hiperbolică este definită prin legea de sinus, este drept să presupunem că Descartes avea în minte legea de refracție cu trei ani mai înainte de vizita sa la Leida în 1630. De aceea, este echitabil ca această lege, crucială pentru dezvoltarea ulterioară a opticii, ca și a științelor în general, să poarte numele de *legea Snell-Descartes*, neuitând nici de Kepler, care a fost atât de aproape de ea, și nici de Witelo, Alhazen sau Ptolemeu, care puteau să o descopere la fel de bine cu mult timp mai înainte.

Este neîndoielnic faptul că fundamentarea teoretică a dioptricii prin Kepler și Descartes a fost impulsionată de lunetele și microscoapele alcătuite accidental abia prin anii 1610, după multe sute de ani de șlefuit sticlă și cristale și de confecționat lentile sau obiecte similare cu acestea. Dar, tot atât de adevărat este și faptul că legea fundamentală a opticii geometrice,
1637 comunicată public de Descartes în 1637, a constituit un instrument puternic pentru depășirea stării de stagnare științifică milenară. Mai întâi, vom asista la metamorfoza legii de refracție într-o lege și mai generală a opticii geometrice, *principiul lui Fermat*, (1657), cu implicații conceptuale profunde în formularea variațională a legilor naturii. Cu aceeași grabă pentru recuperarea timpului pierdut, se trece la proiectarea și construcția telescoapelor de performanță (*Gregory*, *Newton*, *Cassegrain*, *Hooke*, *Huygens*, *Hadley*, *Dollond*, *Herschel*) cu impactul cunoscut în noua astronomie post-telescopică și în reprezentările despre Univers, ca și la introducerea microscopului (*Hooke*, *Leeuwenhoek*) în observațiile micrografice și anatomice de precizie. Se acumulează rapid noi fapte privind fenomene luminoase mai subtile ca, difracția (*Grimaldi*), interferența (*Hooke*), dispersia (*Marci, Newton*), birefringența (*Bartholinus*), viteza luminii (*Römer*, *Bradley*), într-o perioadă de o fertilitate fără precedent, aureolată de geniul lui Newton și de geniul lui Huygens. Spre deosebire de perioada anterioară, în care eforturile savanților

* "ceea ce și noi am văzut cândva și știm că a văzut și Cartesius, încât de aici a apărut poate acea măsură a raportului de sinuși".

erau în mare măsură individuale, începând din această epocă interacția dintre aceștia crește considerabil, schimburile de idei dovedindu-se extrem de fertile pentru provocarea altor descoperiri. Științele, în fine, încep să înflorească și, în ciuda unor fluctuații și instabilități inerente epocii, se cristalizează primele societăți științifice puternice prin Societatea Regală din Londra, 1662, cu celebra sa publicație ***Philosophical Transactions of the Royal Society*** (fondată în 1665) și prin Academia de Științe din Paris, 1664, cu publicația le ***Journal des Savants*** (fondată în 1665), urmate de academiile din Bologna (1712), Berlin (1720), Petersburg (1725), Uppsala (1725), Stockholm (1739), Copenhaga (1743) ș. a. m. d. Să continuăm, deci, cu prezentarea, pe scurt, a marilor momente din perioada post-carteziană.

***Fermat, Pierre de*** (1601-1665), matematician francez, fondatorul teoriei moderne a numerelor și precursor al calculului infinitezimal (a dezvoltat metoda lui Kepler conform căreia, în vecinătatea maximelor și minimelor, variațiile funcțiilor sunt nule). A avut polemici aprinse cu Descartes, atât în probleme de minim și maxim al curbelor cât, mai ales, cu privire la modul în care acesta a "demonstrat" legea de refracție și a ajuns la concluzia că viteza (particulelor) luminii este mai mare în medii mai dense. De fapt, judecând această controversă la nivelul secolului 20, modelul corpuscular Descartes-Newton al luminii poate fi ușor modificat și pus în acord cu experiența acumulată până astăzi. Pentru aceasta, este suficient să scriem conservarea componentei tangențiale a impulsului (și nu a vitezei), adică $p_i \sin i = p_r \sin r$ , de unde rezultă legea de refracție în forma corectă

$$\frac{\sin i}{\sin r} = \frac{p_r}{p_i} = n \quad ,$$

și care ***nu*** poate fi transcrisă în forma $\frac{\sin i}{\sin r} = \frac{V_r}{V_i} = n$ , deoarece ***impulsul*** fotonului (particulei de lumină) ***nu*** se scrie ca produsul $p = mV$ . Cum știm (Einstein - de Broglie), $p \sim 1/\lambda = \nu/V \sim 1/V$ , unde ***V este viteza de fază*** a undei monocromatice de lumină, astfel că expresia corectă a legii de refracție se mai poate scrie, alternativ, în forma

$$\frac{\sin i}{\sin r} = \frac{V_i}{V_r} = n \quad ,$$

sau, definind indicele absolut de refracție $n_{i,r} = c/V_{i,r}$ , corespunzător trecerii vid-mediu,

$$\frac{\sin i}{\sin r} = \frac{n_r}{n_i} = n \quad ,$$

unde $n$ (simplu) reprezintă indicele relativ de refracție, asociat trecerii mediu (i) - mediu (r) considerate. Dar toate aceste reprezentări nu erau tot așa de clare în perioada căutărilor conceptuale din timpul celebrei dispute Descartes versus Fermat, dispută continuată la nivelul Newton versus Huygens, apoi luând proporții seculare, secolul 18 versus secolul 19, până la împăcarea (sau armistițiul) dualismului particulă-undă din secolul 20. S-ar putea pune întrebarea de ce nu s-a făcut, încă de la început, un experiment prin care să se decidă, de exemplu, dacă viteza luminii este mai mare în apă decât în aer, cum rezultă din formula originală a lui Descartes, sau invers, cum susținea Fermat. Răspunsul este că, prin tehnica experimentală a secolelor 17 și 18, nu se putea stabili dacă viteza luminii crește sau scade în medii mai dense. Tot ce

**1676** s-a putut face a fost determinarea vitezei luminii în vid prin metode
**1727** astronomice (***Römer***, 1676 și ***Bradley***, 1727), cum vom vedea ceva mai departe. De abia la mijlocul secolului 19 (secolul opticii ondulatorii) a fost posibilă demonstrația experimentală, în condiții terestre, că viteza luminii este mai mare în aer decât în medii mai dense, cum este apa (***Fizeau*** și ***Foucault***, 1850). Dar, în acel moment, modelul ondulatoriu al luminii era deja bine consolidat prin demonstrația și lămurirea fenomenelor sale caracteristice de interferență (experiențele lui ***Young***, 1802-1804), difracție (teoria și experiențele lui ***Fresnel***, 1818), și polarizare (natura transversală a undelor de lumină, Young și Fresnel, 1820), îndreptându-se cu pași mari spre culmea gloriei sale, teoria electromagnetică a luminii (***Maxwell***, 1873 și ***Hertz***, 1887). În secolul 17, însă, era riscant de avansat ipoteze asupra naturii subtile a luminii pe baza observațională și experimentală existentă atunci. Desigur, se mai întâmplă uneori ca o prezicere să fie mai târziu confirmată, cum este cazul sugestiei lui Descartes privind curbarea razelor de lumină la trecerea pe lângă un corp ceresc masiv, anticipându-l astfel pe Einstein cu aproape 300 de ani*. Dar, singurul sprijin ferm pentru dezvoltarea mai departe a cunoașterii fenomenelor luminoase era expresia matematică exactă a legii de refracție, a cărei verificare și confirmare experimentală în sticlă, cristale, apă și multe alte lichide devenise o ocupație la ordinea zilei după apariția cărții de optică a lui Descartes. Inițial, Fermat era convins că legea însăși este falsă dar evidența experimentală a devenit curând atât de clară, încât mai rămânea de dezlegat misterul modelului corpuscular al lui Descartes, cu ajutorul căruia dedusese totuși legea formal exactă, dar cu concluzia paradoxală că lumina întâmpină o rezistență mai mică într-un mediu dens decât într-un mediu rarefiat. După mulți ani de strădanii, eventual amintindu-și principiul drumului minim al lui Heron (50 e.n.), Fermat a reușit să înlăture paradoxul vitezei și să formuleze un mare postulat (vezi operele sale publicate postum, ***Varia opera mathematica***, p. 156, Toulouse, 1679), cunoscut sub numele de
**1657** ***principiul timpului minim sau principiul lui Fermat*** (1657). Exprimat mai întâi în forma heroniană "... que la nature agit toujours par les voies les plus courtes" (într-o scrisoare din Toulouse, August, 1657), apoi în forma generală, care cuprinde și refracția, și anume că ***raza de lumină se propagă de la un punct la altul pe traiectoria parcursă în timpul cel mai scurt*** (într-o scrisoare din Toulouse, 1 ianuarie, 1662), cu remarca, adăugată ulterior, că ***timpul de propagare a luminii este staționar*** (minim, maxim sau constant), acest principiu reprezintă expresia cea mai concisă a întregii optici geometrice. Din el rezultau, mai întâi, toate legile cunoscute până atunci ale refracției, reflexiei și propagării rectilinii în medii omogene dar, prin însumare de durate infinitezimale, el este mult mai general, fiind valabil și pentru traiectoriile curbilinii din medii neomogene oarecare. Astfel, de exemplu, pentru refracția la suprafața de separare dintre două medii omogene avem

---

* Mai mult, astronomii zilelor noastre au descoperit veritabile miraje gravitaționale ("quasarii dubli" și "quasarii multipli"), pe care le explică prin deformarea, amplificarea sau multiplicarea imaginii astrelor îndepărtate produsă de masa galaxiilor aflate în apropierea traiectoriei razelor de lumină (vezi Alain Blanchard, ***Les mirages gravitationnels***, La Recherche, octobre, 1987).

$$t_i + t_r = \frac{s_i}{v_i} + \frac{s_r}{v_r} = \text{staționar} \quad ,$$

de unde rezultă aceeași lege a raportului de sinuși, dar în forma fizic acceptabilă $\sin i / \sin r = v_i / v_r = n$ . În formularea sa cea mai generală, valabilă și în medii neomogene, principiul lui Fermat se scrie

$$\int_{t_1}^{t_2} dt = \int_{P_1}^{P_2} \frac{ds}{v} = \text{staționar} \quad .$$

Este evident saltul conceptual făcut de Fermat, de la o lege în sinus care imită direct geometria refracției (și care, la rândul ei, reprezintă o regulă simplă care înlocuiește nesfârșite tabele goniometrice), la un principiu unic, care guvernează comportarea razelor de lumină în orice situație. Concepția lui Fermat, de a construi edificiul de legi ale naturii dintr-un principiu integral de extremum, a inspirat puternic pe marii săi urmași Leibnitz, Jean și Jacques Bernoulli, Maupertuis, Euler, Lagrange, Hamilton, Jacobi, până la Feynman din a doua jumătate a secolului 20.

Astfel, ***Gottfried, Wilhelm Leibnitz*** (1646-1716) a reluat problema în spiritul aristotelian că "natura nu face nimic în zadar" și a avansat
**1682** ***principiul efortului minim*** (***Acta Eruditorum***, Leipzig, 1682), unde prin efort înțelegea un lucru mecanic (travaliu) și anume, produsul dintre forța de rezistență R întâmpinată de lumină în mediu și deplasarea s. Aplicând calculul infinitezimal (pe care îl elaborase în competiție cu Newton) la principiul său $R_i s_i + R_r s_r = \text{minim}$ , obține $R_i ds_i + R_r ds_r = 0$ , de unde, exprimând elementele de drum în funcție de unghiuri, rezultă legea raportului de sinuși în forma $\sin i / \sin r = R_r / R_i$ , adică rezistența este mai mare în mediul mai dens. Deci, în esență nimic nou față de rezultatul lui Fermat dacă facem ipoteza naturală că $v \sim 1/R$ . Dar, pentru a ilustra cât de greu și alunecos este drumul conceptelor și al reprezentărilor fizicii, amintim că Leibnitz a făcut presupunerea ***incredibilă*** că $v \sim R$ (pe baza analogiei că viteza unui râu este mai mare acolo unde albia este mai îngustă). Această opțiune, surprinzătoare, a lui Leibnitz se explică mai ales prin părerea dominantă a timpului său, impusă de autoritatea lui Descartes și Newton, că viteza de propagare a luminii ar fi mai mare în medii mai dense, dar și pentru că formalismul generos, introdus de Fermat în optica geometrică, urma iminent să fie preluat și de științele surori, matematica și mecanica. Căci iată, ***Jean Bernoulli*** (1667-1748) formulează celebra sa ***problemă a brachistochronei*** (***Acta***
**1696** ***Euroditorum***, Leipzig, 1696), la care el însuși dă soluția prin analogie cu optica geometrică iar fratele său mai mare ***Jacques Bernoulli*** (1654-1705) răspunde, printr-o reformulare pentru o clasă mai generală de probleme, punând astfel ***bazele calculului variațional***. În același spirit, ***Pierre Louis Moreau de Maupertuis*** (1698-1759) reia ideea lui Leibnitz și enunță
**1744** ***principiul minimei acțiuni*** (***Mémoires de l'Académie de Paris*** , 1740, 1744), unde prin ***acțiune*** înțelege produsul dintre impulsul $mV$ al unei particule (nu neapărat de lumină) și deplasarea $s$. Acest nou principiu se scrie

$V_i s_i + V_r s_r =$ minim și conduce, cum am văzut, la legea carteziană în forma ei primitivă $\sin i / \sin r = V_r / V_i$ . Dar marea descoperire a fost că, deși fals pentru razele opticii geometrice, acest principiu se potrivea pentru traiectoriile mișcării mecanice. De fapt, formularea precisă a principiului lui Maupertuis, valabilă pentru mișcarea unei particule în câmp conservativ, a fost dată de ***Leonhard Euler*** (1707-1783) în ***Methodus inveniendi lineas curvas, maximi minimive proprietate gaudentes***, Lausanne et Genève, 1744, și anume

**1744**
$$\int_{P_1}^{P_2} V ds = \text{ staționar,}$$

iar pentru condiții mai generale de ***Joseph Louis Lagrange*** (1736-1813) în ***Mécanique Analytique***, 1788, de ***William Rowan Hamilton*** (1805-1865) în ***On a General Method in Dynamics***, Philosophical Transactions of the Royal Society, 1834, de ***Karl Gustav Jacob Jacobi*** (1804-1851) în ***Vorlesungen über Dynamik***, 1866, pentru mecanica clasică, până la ***Richard Phillips Feynman*** (1918-1988), în ***Space-Time Approach to Non-Relativistic Quantum Mechanics***, Rev. Mod. Phys., **20**, 367, (1948) și în ***Quantum Mechanics and Path Integrals***, 1966, pentru mecanica cuantică. Și astfel, elegantele formulări variaționale ale legilor naturii și formalismul lagrangian și hamiltonian asociat, au dominat fizica secolelor 19 și 20. Aceasta a fost deschiderea conceptuală izvorâtă din principiul lui Fermat. Desigur, putem adăuga post festum că, dacă Heron ar fi extins pentru refracție principiul său de minim, atunci el ar fi fost autorul a ceea ce numim principiul lui Fermat, dar, el, precum Ptolemeu în fața legii de sinus, rată marea șansă de salt milenar peste timp.

Revenind la aplicațiile practice, este interesant de remarcat că succesele dioptricii au deblocat mai întâi aplicațiile catoptricii. Astfel, neajunsul principal al primelor lunete, cauzat de aberațiile cromatice (irizarea imaginii), precum și gradul de perfecțiune atins de oglinzile metalice concave, folosite încă din Antichitate (vezi legendele cu oglinzile lui Arhimede sau cu farul din Alexandria și până la presupusul instrument cu oglindă din Ragusa), au condus la ideea ***telescopului de reflexie***, propus mai întâi cu reflector sferic de ***Nicolaus Succhius*** (***Optica philosophica***, 1616), apoi cu reflector parabolic de ***Marin Mersenne*** (***Cogitata phisico-mathematica***, 1644), dar proiectat efectiv de matematicianul scoțian
**1663** ***James Gregory*** (1638-1675) în memoriul său ***Optica promota*** (1663), în care descrie varianta care îi poartă numele (oglindă principală parabolică și oglindă secundară eliptică concavă). La rândul ei, lucrarea lui Gregory îi stimulează pe ***Robert Hooke*** (1635-1703), care realizează efectiv telescopul lui Gregory, dar cu oglinzi sferice (Phil. Trans. Roy. Soc., 1674), pe ***Giovanni Cassegrain*** (1625-1712), care descrie în ***Journal des Savants*** (1672) varianta sa, mai scurtă (cu oglindă secundară hiperbolică convexă), și pe, tânărul atunci, ***Isaac Newton*** (1642-1727). Încă din anul 1666 Newton descoperise fenomenul de dispersie a luminii sau, în terminologia sa, de refringibilitate diferită a razelor de lumină de diverse culori, de unde a tras concluzia imposibilității realizării de lunete perfecte, adică lunete care să dea în lumină albă imagini clare, neirizate. Această concluzie, cunoscută ca

"eroarea lui Newton", (vezi Cap.II, secțiunea 2.7), bazată pe presupunerea că dispersia relativă a luminii este aceeași în toate sticlele, l-a făcut pe Newton să creadă că problema realizării lunetei cu obiectiv acromat este insolubilă. Dar până și această eroare a avut un sfârșit fericit căci atunci Newton s-a apucat să construiască, cu propriile mâini și cu o îndemânare de invidiat până în zilele noastre, telescopul de reflexie care îi poartă numele, reușind o mărire de 30-40X cu un instrument de numai 6 inch lungime și 1 inch diametru
**1672** (***Phil. Trans. Roy. Soc. , 1672***). Toată această istorie a telescopului lui Newton, ca și întreaga sa contribuție inestimabilă la cercetarea experimentală a fenomenelor optice, merită citită direct din opera autorului ei (vezi Isaac Newton, ***Optica***, Ed. Academiei Române, București, 1970). Este o onoare pentru Societatea Regală din Londra că l-a apreciat cum se cuvine pe Newton, alegându-l ca membru al ei în ședința sa din 11 ianuarie 1672 și expunând telescopul realizat de acesta în Biblioteca Societății, unde se află și astăzi lângă inscripția "Invented by Sir Isaac Newton and made with his own hands, 1671". Dar primele telescoape de reflexie, realizate de Hooke și de Newton, erau modele experimentale de mici dimensiuni iar valoarea lor nu consta decât în aceea că indicau căile de urmat pentru obținerea unor performanțe mai bune. Primele astfel de telescoape mai mari, de interes practic, au fost construite abia peste 50 de ani, atât în varianta lui Newton (în 1723), cât și în varianta lui Gregory (în 1726) de către ***John Hadley*** (1682-1744). Dar, avantajele oglinzilor față de lentile (lipsa aberațiilor cromatice și dimensiuni posibile mult mai mari) au stimulat în continuare obținerea unor performanțe și mai bune. Astfel, cele mai puternice telescoape din perioada care urmează au fost construite de celebrul astronom englez ***Sir William Herschel*** (1738-1822), printre care și marele său telescop cu distanța focală de 12 metri
**1795** (***Phil. Trans. Roy. Soc.***, p. 347, 1795), în varianta care îi poartă numele, folosită și în zilele noastre. Cu ajutorul acestor instrumente minunate, Herschel a descoperit planeta Uranus (dublând astfel extinderea sistemului solar cunoscut) și peste 800 de stele duble (arătând că stelele binare se rotesc una în jurul celeilalte în acord cu legea de gravitație a lui Newton), a studiat și catalogat circa 2500 de nebuloase sau roiuri (clusteri) de stele și a făcut descoperirea senzațională a "luminii invizibile" din spectrul infraroșu al
**1800** Soarelui (***Phil. Trans. Roy. Soc.***, p. 292, 1800; măsurând temperatura cu ajutorul unor termometre așezate în diferite porțiuni ale spectrului solar, el a arătat că aceasta crește de la violet spre roșu, atingând valoarea maximă în domeniul invizibil, denumit astăzi infraroșu).

Este remarcabil faptul că determinarea ***vitezei de propagare a luminii*** (în vid), una din cele mai mari cuceriri ale opticii, a fost posibilă mai
**1676** întâi prin metodele astronomice generate de secolul 17 (Römer, 1676 și Bradley, 1727). Până în anul 1676 nu se știa dacă lumina se propagă instantaneu sau nu, iar dacă nu, cât de mare ar putea să fie viteza sa. Încă din Antichitate, domina părerea lui Heron (***Catoptrica***, circa 50 e.n.) că, prin analogie cu traiectoria unei săgeți aruncate cu viteză din ce în ce mai mare, viteza luminii, care se propagă rectiliniu, trebuie să fie mult mai mare decât viteza oricărui corp terestru. Descartes (***La Dioptrique***, 1637) considera că, dacă viteza de propagare a luminii ar fi finită atunci, din compunerea acesteia cu viteza orbitală a Pământului, ar trebui să observăm o mișcare aparentă a

"stelelor fixe" pe bolta cerească (acest efect, denumit aberație stelară, a fost într-adevăr descoperit de Bradley în 1727, adică după 90 de ani). Încercarea lui Galilei (1638), cu semnale luminoase schimbate între doi observatori tereștri, distanțați la circa 3 Km, a eșuat desigur, din cauza timpului mult prea scurt în care lumina se propaga între aceștia. Și astfel, ajungem la momentul Cassini - Römer (1675-1676), al astronomului de origine italiană ***Giovanni Domenico Cassini*** (1625-1712), membru al Academiei Franceze și al Societății Regale, primul director al Observatorului Astronomic din Paris, pe care l-a condus timp de 40 de ani (1671-1711), cu o activitate prodigioasă (circa 200 de memorii științifice, între care descoperirea a patru sateliți ai lui Saturn și studiul rotației planetelor în jurul axelor proprii) și al astronomului danez ***Olaf Christensen Römer*** (1644-1710), și el membru al Academiei Franceze și care, mai târziu (1681-1710), va deveni profesor la Universitatea din Copenhaga, director al Observatorului Astronomic și chiar primar al

**1675** acestui oraș (1705). În august 1675, Cassini a comunicat "la seconde inégalité" în mișcarea sateliților lui Jupiter, efect despre care a scris că "pare cauzat de faptul că luminii îi trebuie un oarecare timp pentru a ajunge de la sateliți la noi și că îi trebuie 10-11 minute pentru a parcurge o distanță egală cu raza orbitei Pământului".

Cum se știa încă de la Galilei (1610), perioadele de revoluție ale sateliților lui Jupiter sunt de câteva zile (de exemplu perioada primului satelit, **Io**, cel mai apropiat de planetă, este, conform datelor actuale, de 42 ore 28 minute 16 secunde iar orbita sa în jurul lui Jupiter este practic în planul orbitei lui Jupiter în jurul Soarelui). Inegalitatea lui Cassini reprezenta observația că timpul dintre două eclipse succesive ale **sateliților** lui Jupiter crește și descrește periodic odată cu îndepărtarea, respectiv cu apropierea, periodică a Pământului de Jupiter, în mișcarea lor orbitală în jurul Soarelui (vezi figura A.3). Astfel, observațiile lui Römer și Cassini din anul 1676 au stabilit faptul că primul satelit al lui Jupiter a ieșit din umbra planetei (a "răsărit" ) cu 10 minute mai târziu în luna Noiembrie decât în luna August, adică după un sfert de an, interval de timp în care distanța dintre Pământ și Jupiter crescuse practic cu o rază a orbitei terestre, confirmând concluzia lui Cassini din anul precedent. Folosind această întârziere, cauzată de propagarea

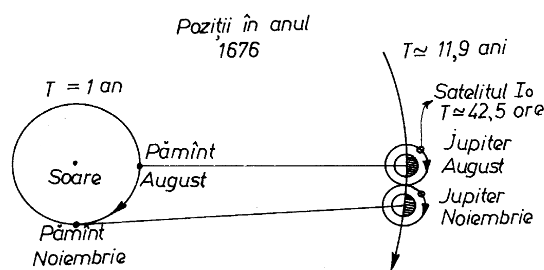



**Fig.A.3.** Determinarea vitezei luminii (metoda Römer).

luminii, și datele de atunci ale razei orbitei Pământului, Römer a găsit pentru viteza luminii o valoare de circa 214000 km/s, valoare, într-adevăr, excesiv

**1676** de mare dar, totuși, ***finită*** (întârzierea de 10 minute a fost supraestimată; cu datele actuale, lumina parcurgând, de fapt, distanța Soare-Pământ de $149.10^6\,km$ în 8,35 minute, de unde rezultă $c \approx 300000\,km/s$). Este interesant de amintit că argumentul lui Descartes, formulat cu aproape 40 de ani mai

înainte, cu privire la aberația stelară, era așa de tare, încât Cassini, inițiatorul și co-autorul primei metode prin care s-a determinat, în fine, viteza luminii, s-a desolidarizat de acest rezultat, iar Römer l-a comunicat singur, în condiții de mare ostilitate, în ședința Academiei de Științe din 21 noiembrie 1676, publicându-l apoi în ***Journal des Savants*** din 7 decembrie 1676 și în ***Philosophical Transaction of the Royal Society*** din 1677. Descoperirea nu a fost, totuși acceptată de comunitatea științifică a timpului până când obiecția

**1727** carteziană nu a fost satisfăcută, iar aceasta s-a întâmplat abia în anul 1727, când astronomul englez ***James Bradley*** (1693-1762), profesor la Universitatea din Oxford și membru a trei academii (Societatea Regală din Londra, Academia de Științe din Paris și Academia de Științe din Berlin), a descoperit, în fine, și efectul de aberație stelară (***Phil. Trans. Roy. Soc.***, **35**, p. 637, 1728). Astfel, studiind cu grijă poziția stelelor $\gamma$ și $\delta$ din constelația Dragonului, situate practic la polul eclipticii Pământului, Bradley a observat că, într-adevăr, în decurs de un an, acestea descriu câte o mică elipsă, cu un diametru unghiular de $2\alpha \approx 40''$. Prin analogie cu înclinarea necesară a unei umbrele la deplasarea prin ploaie (vezi figura A.4), înclinarea telescopului de observare, cauzată de aberația stelară, este $\alpha \approx V/c$, unde $V \approx 30\,km/s$ este viteza orbitală a Pământului iar $\alpha \cong 20'' = 10^{-4}\,radiani$. Și, astfel, Bradley obține:

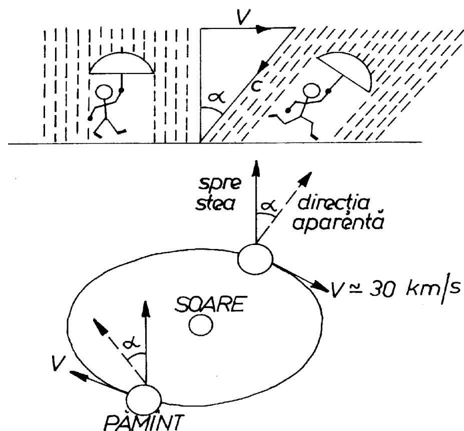


Fig.A.4. Pentru înțelegerea aberației lui Bradley.

$$c \cong \frac{V}{\alpha} \cong \frac{30}{10^{-4}}\,km/s = 300000\,km/s \quad ,$$

confirmând rezultatul lui pe Römer și stabilind definitiv valoarea primei constante universale. Mai mult de 100 de ani aveau să treacă până când ***Armand Hippolyte Louis Fizeau***, cu roata dințată (***C. R. Acad. Sci.***, Paris, 1849) și ***Jean Bernard Léon Foucault***, cu oglinda rotitoare (***C. R. Acad. Sci.,*** Paris, 1850) vor deschide seria măsurătorilor terestre ale lui c, a cărei valoare actuală (stabilită în 1970) este

$$c = 299792,458\,km/s \;,$$

cu o eroare de cel mult 300 m/s, adică de 0,0001%. Un număr considerabil de experiențe au fost făcute pentru a determina cât mai exact viteza luminii. Întrucât aceasta este foarte mare, este necesar să fie folosite distanțe foarte mari și/sau intervale de timp foarte scurte. Alternativ, se măsoară lungimea de undă în vid, $\lambda_0$, a unei unde electromagnetice de frecvență $\nu$ cunoscută, viteza luminii rezultând din relația simplă $c = \nu\lambda_0$. De fapt, tot arsenalul de

dispozitive electronice clasice și cuantice ale secolului 20 și-a verificat performanțele în determinarea acestei mărimi, dată fiind importanța ei în întreaga evoluție a teoriilor fizice. Este viteza luminii "foarte mare" ? Puteți aprecia singuri știind că luminii îi trebuie ca să ajungă de la Soare la noi, cum am văzut, circa 8 minute, de la cele mai apropiate stele (Alfa Centauri și Proxima Centauri) 4,3 ani, de la cea mai strălucitoare stea (Sirius) 8,5 ani, de la Steaua Polară 400 de ani, de la centrul Galaxiei noastre $5.10^4$ ani, de la cele mai apropiate galaxii $2,5.10^6$ ani, de la cele mai îndepărtate galaxii observate $6,5.10^9$ ani, iar de la marginea Universului nostru observabil poate $19.10^9$ ani. Ceea ce este esențial pentru structura Universului nostru este însă faptul că viteza luminii în vid nu poate fi atinsă de nici un alt corp material, că ea nu poate fi depășită de nici-un alt semnal, că lumina în vid este cel mai rapid mesager iar ***c este o viteză limită***, afirmație într-adevăr foarte tare, ridicată de ***Albert Einstein*** la rangul de postulat al teoriei relativității. O altă caracteristică remarcabilă legată de natura ei subtilă este că ***lumina se propagă și în vid***, adică într-un spațiu lipsit de substanța atomo-moleculară obișnuită (spre deosebire de sunet, de exemplu, care o presupune) ceea ce atrage atenția asupra faptului că acest "vid" trebuie să fie sediul unor proprietăți și procese la nivelul cel mai rafinat și profund al materiei.

Dacă prin telescop a fost descoperit Universul obiectelor îndepărtate, prin microscop a fost descoperit Universul obiectelor infime. ***Robert Hooke*** (1635-1703), amintit mai înainte pentru construcția primului telescop de reflexie (1674), îmbunătățind substanțial calitatea lentilelor, a
**1675** realizat și ***primul microscop compus*** de interes practic (1675), devenind pionierul observațiilor microscopice de precizie. Toate acestea sunt descrise în cartea sa de referință în istoria microscopului, ***Micrographia or some physiological descriptions of minute bodies***, London, 1665. Hooke a jucat un rol de prim ordin în ***organizarea Societății Regale din Londra***, ca membru fondator (1663), director (curator) permanent pentru experiențe și ședințele săptămânale (1662-1703) și unul din secretarii societății (din 1677). Dintre primii membri aleși ca ***Fellow of the Royal Society (F. R. S.)*** amintim nume ilustre ca ***Huygens*** (1663); ***Newton*** (1672); ***Flamsteed*** (1676), primul director al Observatorului Astronomic din Greenwich (1675); ***Halley*** (1678), cunoscut pentru calculul său al orbitei cometei Halley, 1682, autorul binecunoscutei formule $(1/p_1)+(1/p_2)=(n-1)\cdot[(1/r_1)-(1/r_2)]$ și, în fine, un celebru rival al lui Hooke, biologul olandez ***Antony van Leeuwenhoek*** (1632-1723), F.R.S. din 1679, care și-a uimit contemporanii cu descoperirile sale la ***microscopul simplu*** (***Phil. Trans. Roy. Soc.***, 1673), autorul celor patru volume de opere ***Arcana naturae ope microscopiorum detecta*** (***Secretele naturii descoperite prin microscop***), Leiden, 1722. Cu lentile construite de el cu mare precizie, cele mai mici având un diametru de numai 0,5 mm, și probe fixate pe vârful unui ac, Leeuwenhoek a putut observa structuri și procese biologice la nivele inaccesibile până atunci, cu o putere de rezoluție a detaliilor până aproape de limita teoretică de un micron. Cu ajutorul unui astfel de instrument, el a studiat textura dinților și oaselor, striația fibrelor musculare, structura fibroasă a cristalinului, circulația capilară sangvină (confirmând și dezvoltând observațiile microscopice anterioare ale

medicului italian ***Marcello Malpighi***, 1661), a dat prima descriere exactă a globulelor roșii, a bacteriilor, a protozoarelor și a fost primul observator al mișcării haotice permanente a particulelor infime suspendate în lichide (1673). Această ***mișcare browniană*** a fost confirmată în 1827 de fizicianul scoțian ***Robert Brown*** (1773-1858), care a observat la microscop neîntrerupta mișcare în zig-zag a granulelor de polen suspendate într-o picătură de apă. Teoria cinetică a mișcării browniene a suspensiilor, produsă prin ciocnirile moleculare, a fost dată de ***Albert Einstein*** (1905) și strălucit confirmată experimental de ***Jean Perrin*** (1908) prin clasicul său studiu microscopic al particulelor de fum (diametru $\cong 10^{-4}$ cm) din aer, prilej cu care a fost determinată o foarte bună valoare a ***numărului lui Avogadro***.

Începând din secolul 17, studiul refracției a căpătat un mare avânt datorită interesului practic și științific pentru construcția instrumentelor optice. Formulele lentilelor și oglinzilor sferice, construcțiile geometrice ale imaginilor, introducerea în studiul aberațiilor, toate acestea au fost opera unor oameni ca ***Johannes Kepler*** (***Dioptrice***, 1611), ***Francesco Bonaventura Cavalieri*** (***Exercitationes geometricae***, 1647), ***Christiaan Huygens*** (***Dioptrica***, 1653), ***Isaac Newton*** (***Lectiones opticae***, 1669), ***Isaac Barrow*** (***Lectiones opticae et geometricae***, 1674) și ***Edmund Halley*** (***Phil. Trans. Roy. Soc.*** , 1693), sistematizate în marile tratate de optică ale secolului 18, scrise de ***David Gregory*** (***Optics***, 1735), ***Robert Smith*** (***A Compleat System of Optics***, 4 volume, 1738), ***Joseph Harris*** (***A Treatise of Optics***, 1775) și popularizate prin cărțile de largă accesibilitate ale lui ***James Ferguson*** (***Astronomy explained upon Sir Isaac Newton's Principles, and made easy for those who have not studied Mathematics***, 1756; ***Lectures on Selected Subjects in Mechanics, Hydrostatics, Pneumatics and Optics***, 1760). În anii 1655-1660 a fost depus un efort considerabil pentru perfecționarea lunetelor (telescoape de refracție) de frații ***Christiaan*** și ***Constantin Huygens*** și de italienii ***Eustachio de Divini***, ***Giuseppe Campani*** și marele elev al lui Galilei, ***Evangelista Torricelli*** (prima demonstrație că o mică sferă de sticlă, așa cum se poate ușor topi în flacără, reprezintă cea mai puternică lupă; astfel s-a putut înțelege de ce nu trebuie udate plantele în plin soare: picăturile sferice de apă concentrează energia solară în focare - situate aproape de contactul cu frunzele, pe care le ard local). Ei au realizat obiective de lunetă cu distanțe focale de 30 - 40 m, foarte bine tăiate și șlefuite, dar irizarea cauzată de deviațiile cromatice, atât de frumos studiată de Newton în experiențele sale cu lentile și prisme (***Lectiones Opticae***, 1669; disertația ***A New Theory about Light and Colours***, prezentată în ședința de comunicări a Societății Regale din Londra la 6 Februarie 1672; tratatul de "***Opticks***", 1704) a împiedicat obținerea unei calități satisfăcătoare a imaginii. Celebra "***eroare a lui Newton***", privind imposibilitatea principială ca o lentilă să refracte lumina compusă din diverse culori într-un focar comun, a fost îndreptată abia în anul

**1758** 1758 de opticianul londonez ***John Dollond*** (1706-1761), care a introdus ***dubletul acromat de contact***, realizat prin alipirea unei lentile convexe de sticlă Crown de o lentilă concavă de sticlă Flint. Pentru această realizare de importanță deosebită în perfecționarea instrumentelor optice de refracție, Dollond a primit brevet de invenție (urmașii săi și firma Dollond și Aitchison din Londra sunt activi și astăzi) și a fost onorat de Societatea Regală prin

alegerea sa ca F.R.S (unde a prezentat comunicarea ***An Account of some Experiments concerning the different Refrangibility of Light***, 1758). Dar ca orice descoperire, și invenția acromatului are un context și o istorie proprie. În acest caz, dubletul acromat fusese descoperit de fapt în 1733 de opticianul amator, avocat de profesie, ***Chester Moor Hall*** (1703-1771), care însă a reușit să practice arta sa în secret timp de 25 de ani, până când Dollond a aflat cu totul întâmplător de ea în timpul unei vizite în atelierul șlefuitorului de lentile George Bass. Întâmplarea l-a găsit însă cu totul pregătit pe Dollond, care era interesat de mai multă vreme de problema lentilei acromatice, fiind în corespondență cu marele matematician ***Leonhard Euler***, preocupat și el de teoria culorilor și de compensarea aberațiilor cromatice cu ajutorul mediilor optice de dispersie opusă (***Nova theoria lucis et colorum***, Mem. Acad.
**1746** Berlin, 1746) și cu ***Samuel Klingenstierna*** (1689-1785), profesor de matematică și fizică la Universitatea din Uppsala, membru al Academiei de Științe din Paris și al Societății Regale din Londra, care, inspirat de Euler, descoperise eroarea lui Newton și elaborase o teorie matematică a
**1760** obiectivului acromat (publicată în 1760). Istoria poate deci onora pe Hall cu titlul de inventator, dar și pe Euler și Klingenstierna pentru cercetarea lor fundamentală, și pe Dollond pentru introducerea în practică curentă a acestei invenții cu mari consecințe. Problema obiectivului acromat l-a preocupat mulți ani pe Euler (membru al Academiei din Berlin, 1762), el realizând efectiv o lunetă compusă din opt lentile și calculând numeroase combinații de lentile (***Dioptrica***, 3 volume, Petersburg, 1769-1771). Dar, cercetările de dispersie a luminii prin descompunere spectrală cu ajutorul prismelor, atât de frumos lansate de Newton în anii 1670, au fost reluate abia în anul 1800. Astfel, cum am arătat, ***William Herschel*** (***Experiments on the Refrangibility
**1800** of the invisible rays of the Sun***, Phil. Trans. Roy. Soc. 1800) descoperă ***razele termice*** (***infraroșii***) invizibile, care se reflectă și se refractă conform legii Snell-Descartes. Repetând experiența lui Herschel, dar folosind ca detector înnegrirea clorurii de argint, ***Johan Wilhelm Ritter*** (1776-1810) a descoperit razele ultraviolete observând că acțiunea ***razelor chimice*** (***ultraviolete***) este mai slabă în roșu dar atinge un maxim imediat după
**1801** extremitatea violetă a spectrului vizibil (***Gilberts Annalen***, **7**, 525, 1801). În paranteză, notăm că ***prima fotografie durabilă*** a fost realizată abia în anul
**1826** 1826 de ***Joseph Nicéphore Niépce*** (1765-1833), care a folosit o cameră obscură cu lentilă convergentă și o expunere de circa opt ore pe o placă fotosensibilă dintr-un aliaj de cositor; procesul de fotografiere (negativ/pozitiv) familiar astăzi, cu înregistrarea imaginilor pe hârtie acoperită cu clorură de argint și fixată cu clorură de sodiu, a fost introdus în 1835 de ***William Henry Fox Talbot*** (1880-1877).

**1802** După această scurtă digresiune, să revenim la anul 1802 în care ***William Hyde Wollaston*** (1766-1828) a făcut două observații remarcabile (a căror semnificație a fost înțeleasă abia peste 15 ani de Fraunhofer). Pe scurt, Wollaston, a refăcut cea mai simplă experiență cu prismă, descrisă de Newton în felul următor: Într-o cameră foarte întunecoasă, în dreptul unui orificiu rotund făcut în oblonul unei ferestre și larg de aproximativ o treime de inch, am așezat o prismă de sticlă prin care fasciculul de lumină solară să poată fi refractat mai mult spre peretele opus al camerei și acolo să formeze o

imagine colorată a Soarelui (vezi Isaac Newton, ***Optica***, p. 26, ediția tradusă în limba română de prof. Victor Marian, Ed. Academiei, București, 1970). Varianta lui Wollaston (***A method of examining refractive and dispersive powers by prismatic reflection***, Phil. Trans. Roy. Soc. II, pp. 365-380, 1802) a constat în aceea că el a privit ***direct prin prismă*** la ***o fantă îngustă*** puternic iluminată de Soare, observând astfel, pentru prima dată, spectrul solar brăzdat de câteva linii întunecoase (desigur, liniile de absorbție Fraunhofer). Wollaston a folosit apoi ca sursă de lumină o flacără de lumânare și a observat pentru prima dată, câteva linii strălucitoare pe un fond întunecos (adică spectrul de linii de emisie atomică, între care, desigur, și dubletul, nerezolvat, D al sodiului). Wollaston, ca și Newton cu 130 de ani înainte, se găsea, de fapt, în interiorul camerei unui mare și rudimentar spectroscop cu prismă, dar nu și-a dat seama că aici se pregătea semnarea actului de naștere al fizicii cuantice (iminentă în scala istoriei milenare a opticii). Încă un pas a mai trebuit genialului experimentator ***Joseph von Fraunhofer*** (1787-1826) ca să materializeze ideea celebrei experiențe a lui Newton în forma ***spectroscopului modern***. Fraunhofer, nevoit încă de mic să-și câștige existența din optică și mecanică fină, studia pe atunci acromatizarea lentilelor de telescop încercând, în prealabil, acromatizarea combinațiilor de prisme din sticlele testate. Pentru a face măsurători cât mai precise asupra refringibilității razelor de diferite culori, el a folosit montajul optic, astăzi familiar, cu fascicul paralel de lumină, limitat de o fantă fină, incident pe prisma de sticlă fixată în poziția de deviație minimă și observare a spectrului prin lunetă. Cu acest instrument minunat a descoperit Fraunhofer (***Bestimmung des Brechungs und Farbzerstreungs Vermögens verschiedener Glassorten in Bezug auf die Verrolkommung achromatischer Feruröhre***, Denkschr. der Münch. Akad. d. Wiss, **5**, 193,
**1817** 1817) că spectrul continuu al Soarelui este brăzdat (etalonat sui generis) de nenumărate linii spectrale fine, mai mult sau mai puțin întunecate, un marcher ideal al poziției culorii în spectru, care permite caracterizarea riguroasă a dispersiei mediilor optice (vezi exemplu, tabelul din secțiunea 2.7, ***Aberații cromatice***) și alegerea celor mai convenabile sticle pentru construcția sistemelor optice acromatice. Aceste linii au căpătat de atunci denumirea de ***linii Fraunhofer***, cele mai intense (cele mai negre în spectrul Soarelui) fiind notate cu literele alfabetului latin. Abia din acest moment, cu sticle optice de indice de refracție și dispersie precis cunoscute, a fost posibilă construcția marilor telescoape de refracție. A doua realizare epocală a lui Fraunhofer constă în ***invenția rețelei de difracție****** ( ***Neue Modifikation des Lichtes durch gegenseitige Einwirkung und Beugung der Strahlen und Gesetze derselben***, Denkschrift der K. Akademie zu München, **8**, 1, 1821-22), element mult mai dispersiv decât prisma optică și care, în plus, permite caracterizarea precisă a culorilor și liniilor spectrale prin lungimi de

---

* De fapt, difracția luminii în mai multe ordine spectrale cu ajutorul unei rețele de fire paralele fusese remarcată încă de astronomul american ***David Rittenhouse*** (1785), dar simplele sale observații, ca atare, nu au avut nici-un ecou și au căzut repede în uitare. Abia ***Thomas Young*** , prin celebrele sale experiențe din anii 1801-1803 (vezi ***Lectures on Natural Philosophy***, London, 1807) avea să demonstreze interferența undelor de lumină care provin de la surse coerente și să ne învețe cum să determinăm lungimile de undă pentru diverse culori.

undă (teoria difracției Fraunhofer prin rețele optice a fost definitivată în 1835 de către ***Friedrich Magnus Schwerd*** în lucrarea de sinteză intitulată ***Die Beugungserscheinungen aus den Fundamentalgesetzen der Undulationstheorie analytisch entwickelt***).
În primele experiențe el a folosit rețele din fire subțiri metalice întinse echidistant cu ajutorul a două șuruburi paralele, perioada rețelei fiind astfel egală cu pasul șurubului (rețele de circa 10 fire pe milimetru). Nemulțumit, Fraunhofer a realizat apoi rețele mult mai dese, până la 300 de linii pe milimetru, trasând cu ajutorul unei mașini de divizat cu cuțit de diamant linii echidistante pe o lamă de sticlă (procedeu folosit până în zilele noastre). Cu ajutorul acestor rețele, el a extins și precizat măsurătorile sale atât în spectrul de linii negre al luminii solare, directe sau reflectate de Lună sau Venus,
**1826** observând până la 576 astfel de "linii Fraunhofer", cât și în spectrul de linii strălucitoare ale surselor de lumină terestre (flacăra, scânteia și arcul electric). În particular, el a stabilit că linia neagră D din spectrul Soarelui coincide cu linia galbenă strălucitoare caracteristică a sodiului. Și astfel, în scurta sa viață, de numai 39 de ani, Fraunhofer a introdus și instrumentele de bază ale spectroscopiei optice moderne. Ca un omagiu adus omului care a realizat primul telescop de refracție acromat de mare precizie și a demonstrat că liniile spectrale provenite de la elementele astrelor sau ale surselor terestre sunt aceleași, mormântul său din München poartă epitaful "***Approximavit Sidera***" , El a apropiat stelele.

Un rol important în realizarea obiectivelor acromate de diametre (deci puteri de rezoluție unghiulară, vezi ecuația (249)) mari l-a jucat perfecționarea tehnologiei de fabricație a sticlelor ***crown*** și ***flint*** de către opticianul elvețian ***Pierre Louis Guinand*** (1748-1824) prin folosirea agitatorului care asigură eliminarea bulelor de gaz și a tensiunilor și omogenizarea pastei de sticlă optică în timpul răcirii. Sticlele lui Guinand aveau următoarele compoziții: sticla crown, slab dispersivă ($72\% SiO_2$, $18\% K_2CO_3$ și $10\% CaO$), sticla de flint, puternic dispersivă și refractivă ($45\% SiO_2$, $12\% K_2CO_3$ și $43\% PbO$) și erau mult mai pure, mai transparente și mai omogene (fără striuri) decât până atunci. Producția lor a fost curând monopolizată de marile firme ***Feil*** din Paris și ***Chance*** din Birmingham. Cu astfel de sticle au fost construite marile telescoape de refracție, începând cu vestita lunetă cu diametrul obiectivului $D = 24\,cm$, realizată de Fraunhofer (fostul ucenic și apoi asociatul lui Guinand) și instalată la Tartu, Estonia, în 1824, la cererea astronomului ***Friedrich Georg Wilhelm von Struve***, până la telescoapele refractoare cu obiective uriașe, realizate de opticianul american ***Alvan Clark*** (1804-1887) și instalate în marile observatoare astronomice printre care cel din Pulkovo, Rusia ($D = 75cm$, în 1885), din Lick, S.U.A. ($D = 91\,cm$, în 1888) și din Yerkes, S.U.A. ($D = 102\,cm$, în 1897). În general, realizarea sticlelor optice de înaltă calitate a dat un puternic impuls opticii instrumentale (telescopul, obiectivul fotografic, microscopul, instrumentele spectrale).

Să urmărim mai întâi progresele spectroscopiei, ale cărei baze experimentale au fost puse, cum am arătat, de Fraunhofer. Astfel, spectroscopul cu prismă a fost perfecționat de ***Meyerstein*** (1856, 1861), ***Amici*** (1860) a introdus sistemul de prisme cu viziune directă (cimentarea

alternativă a unei prisme de flint între două prisme de crown sau a două
prisme de flint între trei prisme de crown, în așa fel că lungimea de undă
medie din spectrul vizibil apare nedeviată), ***Geissler*** (1856) inventează
tuburile de descărcări în gaze la presiune joasă, punând astfel la dispoziție o
nouă sursă de lumină pentru spectroscopia de emisie. Spectroscopia va
deveni în curând cea mai fină și mai precisă metodă de investigare a
proceselor intime de emisie și absorbție a luminii care au loc în sistemele
atomice și moleculare, provocând o nouă revoluție în cunoașterea
Universului și a structurii materiei. Astfel, pentru a cita numai câteva din
suita de nume ilustre, marele teoretician ***Gustav Robert Kirchhoff***
(1824-1887) și abilul experimentator ***Robert Wilhelm Bunsen*** (1811-1899),
în atmosfera științifică a orașului universitar Heidelberg, au pus ***bazele
analizei spectrale***, metodă ultrasensibilă pentru determinarea compoziției
**1860** chimice a substanțelor terestre și cosmice (***Chemische Analyse durch
Spektralbeobachtungen***, Poggendorff Annalen, 1860; ***Untersuchungen über
das Sonnenspektrum und Spektren der chemischen Elemente***, Abhandl.
**1863** Berlin. Akad., 1861-1863). În particular, Kirchhoff, care a fundamentat
matematic teoria scalară a difracției luminii, a explicat liniile Fraunhofer
ca linii de absorbție în gazele mai reci din atmosfera solară și a stabilit
celebra sa lege conform căreia ***raportul dintre puterea de emisie și puterea
de absorbție a corpurilor este o funcție universală de frecvență și
temperatură.*** În Suedia, ***Anders Jonas Ångström*** (1814-1874), un clasic al
măsurătorilor spectroscopice de înaltă precizie (unitatea de lungime
1Å= $10^{-10}\,m$ îi poartă numele), a determinat valoarea absolută a lungimilor
de undă a 1000 de linii Fraunhofer din spectrul Soarelui (***Recherches sur le
**1868** spectre normal du Soleil***, Uppsala, 1868). ***Henry Augustus Rowland***
(1848-1901) a inventat rețeaua concavă și a perfecționat tehnica trasării
rețelelor optice de difracție până la 1700 linii pe milimetru, deschizând astfel
drumul spectroscopiei de înaltă putere de rezoluție din infraroșu și vizibil
până în vacuum ultraviolet (***Manufacture and Theory of Gratings for
**1882** Optical Purposes***, Phil. Mag., **13**, 469, 1882; ***Table of the Solar Spectrum
Wavelengths***, Astrophys. Jour., **1-6**, 1895-1898). ***Johann Jakob Balmer***
(1825-1898) a formulat binecunoscuta lege a lungimilor de undă ale liniilor
din spectrul vizibil al hidrogenului (***Notiz über die Spectrallinien des
Wasserstoffs***, Wied. Ann., **25**, 80, 1885). ***Johannes Robert Rydberg***
(1854-1919), a descoperit legea generală a frecvențelor liniilor din seriile
spectrale ale hidrogenului și anume $\nu = R[(1/m^2) - (1/n^2)]$ , unde apare
constanta universală $R = 3,2869.\ .10^{15}\ \sec^{-1}$ care îi poartă numele
(***Recherches sur la constitution des spectres d'emission des éléments
**1890** chimiques***, Kongl. Svenska Vetensk. Akad. Handling, **23**, 155, 1890). Pasul
Următor a fost făcut de ***Walter Ritz*** (1878-1909) cu ***principiul de combinare***
conform căruia frecvența oricărei linii spectrale poate fi reprezentată în
forma $\nu = T_m - T_n$ , unde sistemul de numere $T_i$ , denumite ***termeni
spectrali***, este caracteristic pentru sistemul atomic considerat. Semnificația
acestui principiu a fost înțeleasă de ***Niels Henrik David Bohr*** (1885-1962),
care a identificat sistemul de numere $-T_i$ cu sistemul de nivele de energie
posibile $E_i$ ale electronilor în atom, constanta de proporționalitate fiind chiar

constanta $h$ a lui Planck, adică $E_i = -hT_i$ , de unde rezultă celebrul său ***postulat al frecvențelor*** $h\nu = E_n - E_m$ prin care a pus bazele structurii cuantice a atomilor și a interacției lor cu lumina (Phil. Mag. **26**, 1, 476, 857
1913 (1913); ***The Theory of Spectra and Atomic Constitution***, Cambridge, 1922; ***On the Application of the Quantum Theory to Atomic Structure***, Cambridge, 1924). Și mai profund a pătruns ***Albert Einstein*** (1879-1955) în mecanismul subtil al interacției luminii cu sistemele atomice prin lucrarea sa fundamentală privind procesul de ***emisie stimulată*** care, împreună cu procesele de emisie spontană și de absorbție i-au permis o deducere uimitor de simplă și generală a legii de distribuție a energiei radiante din spectrul corpului negru (***Zur Quantentheorie der Strahlung***, Physicalische Zeitschrift,
1917 **18**, 121, 1917). Vor mai trece, însă, câteva zeci de ani până când ideile lui Einstein se vor concretiza în dispozitivele cuantice, azi atât de răspândite, care realizează amplificarea luminii prin emisia stimulată de radiație. Cum se
1960 știe, prima rază laser a țâșnit dintr-un cristal de rubin abia în iunie 1960, în laboratorul condus de ***Theodore H. Maiman*** (n. 1927) la Hughes Aircraft Co., Malibu, California, deschizând o nouă eră în istoria milenară a opticii (pentru o prezentare istorică detaliată vezi ***Mario Bertolotti***, ***Masers and Lasers - An Historical Approach***, Adam Hilger Ltd. Bristol, 1983). Dar revoluției opticii cuantice, declanșată în anul 1900 de către ***Max Karl Ernst Ludwig Planck*** (1858-1947) prin introducerea conceptului de ***cuantă de lumină*** și stabilirea legii radiației termice (***Über irreversible
1900 Strahlungsvorgänge*** , Ann. Physik, **1**, 69, 1900), i s-ar putea rezerva o întreagă carte.

Să revenim la istoria opticii geometrice din momentul marcat de matematicianul, astronomul și fizicianul irlandez ***Sir William Rowan Hamilton*** (1805-1865) prin seria sa de lucrări ***Theory of Systems of Rays***,
1828 publicate în Transactions of the Royal Irish Academy (**15**, 69-174, 1828; **16**, 1-61, 1830; **16**, 93-125, 1831; **17**, 1-144, 1837) și în care, având la bază principiul lui Fermat și calculul variațional, introduce celebrele sale ***funcții caracteristice*** $V$ , $W$, $T$ ale sistemelor optice. Astfel, de exemplu, funcția de șase variabile $V$, denumită astăzi ***eiconalul punctual***, este definită ca drumul optic

$$V(x, y, z; x', y', z') = \int_{P}^{P'} n ds \quad ,$$

dintre punctul $P(x, y, z)$ din spațiul obiect și punctul $P'(x', y', z')$ din spațiul imagine, satisfăcând ecuațiile eiconalului

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2 = n^2(x, y, z) \quad ,$$

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x'}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y'}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z'}\right)^2 = n'^{\,2}(x', y', z') \quad ,$$

unde derivatele parțiale reprezintă direcția razei de lumină în punctul considerat. Cum proprietățile sistemelor optice pot fi descrise în funcție de

punctele și/sau de razele (cosinușii directori) din spațiul obiect și imagine, Hamilton a mai introdus și funcțiile caracteristice "auxiliare" $W$ și $T$, denumite în terminologia modernă ***eiconalul mixt*** și, respectiv, ***eiconalul unghiular***. Oricare din funcțiile caracteristice ale lui Hamilton caracterizează sistemul optic, utilizarea lor prezentând avantaje specifice în diversele aplicații, cum a arătat chiar el însuși pentru lentile, oglinzi și sisteme de revoluție în general, pentru propagarea în medii anizotrope și în atmosferă.

Formalismul elaborat de Hamilton pentru razele de lumină ale opticii geometrice a fost extins de el și pentru traiectoriile particulelor din dinamica clasică într-o scurtă notă intitulată ***On the Application to Dynamics of a General Mathematical Method Previously Applied to***
**1834** ***Optics***, publicată în British Association Report (1834) și în articolul definitiv ***On a General Method in Dynamics: by which the Study of the Motions of All Free Systems of Attracting or Repealling Points is Reduced to the Search and Differentiation of One Central Relation or Characteristic Function***, publicat, de astă dată, în revista cu cel mai înalt prestigiu și cea mai largă circulație (Phil. Trans. of the Royal Society , 1834).

Metoda matematică generală și fertilă a funcțiilor caracteristice, introdusă de Hamilton în optica geometrică și în dinamică, reprezintă una din cele mai profunde descoperiri ale secolului 19. Dar, în timp ce formalismul hamiltonian din dinamică a devenit îndată bine cunoscut, grație lucrărilor lui ***Karl Gustav Jacob Jacobi*** (1804-1851), marea operă de optică geometrică a lui Hamilton a căzut pentru multe zeci de ani în uitare (cu excepția lui Maxwell (***On the Application of Hamilton's Characteristic Function***), Proc. London Math. Soc., **6**, 117, 1875) și a lui Thiesen (Ann. d. Physik, **45**, 821, 1892)). Conceptul de funcție caracteristică, sub denumirea de ***eiconal***, a fost redescoperit și repus în circulație abia de către ***H. Bruns*** (***Das Eikonal***, K.
**1895** sächs. Ges. d. wiss. Abhand. math. - phys. Kl., **21**, 323-436, 1895) și, fapt extraordinar, în totală ingoranță a operei de optică a marelui său precursor, cum rezultă din propoziția de la pagina 329: "Eine ganz ähnliche Rolle, wie der Hamilton'sache Ansatz in der Mechanik, spielt nun der Eikonalbegriff auf dem allerdings weit engeren Gebiete der geometrischen Optik". Avem aici un exemplu amuzant de modul cum avansează știința prin bezn. De fapt, Bruns a parcurs drumul în sens invers, adică de la mecanica lui Hamilton și Jacobi la optica geometrică, dar pornind de la teorema lui Malus (1808) și nu de la principiul mult mai general al lui Fermat (aplicabil și în medii anizotrope). În fine, Bruns a ajuns la funcții eiconal aparent mai simple (de patru variabile) dar care reprezintă doar cazuri particulare ale funcțiilor caracteristice hamiltoniene prin intersecția congruențelor de raze cu o pereche de plane de referință $(z=0, z'=0)$ . Din acest motiv, peste o sută de ani de la crearea formalismului hamiltonian în optică (1824-1844), importanța relativă a contribuțiilor lui Hamilton și Bruns a fost încă obiectul unei dispute ascuțite între ***John Lighton Synge*** (***Hamilton's Method in Geometrical Optics***, J. Opt. Soc. Amer., **27**, 75, 1937; ***Hamilton's Characteristic Function and Bruns'Eikonal,*** J. Opt. Soc. Amer., **27**, 138, 1937) și ***Maximillian Jakob Herzberger*** (***On the Characteristic Function of Hamilton, the Eikonal of Bruns and Their Use in Optics***, J. Opt. Soc. Amer., **26**, 177, 1936; ***Hamilton's Characteristic Function and Bruns***

***Eikonal***, J. Opt. Soc. Amer., **27**, 133, 1937), încheiată în favoarea primului dar cu denumirea, mai scurtă, de eiconal, păstrată. În același timp, compatrioții lui Hamilton, A. W. Conway și J. L. Synge, au editat două volume din lucrările publicate și din manuscrisele sale sub titlul ***The Mathematical Papers of Sir William Rowan Hamilton***, vol. I: ***Geometrical Optics*** (1931) și vol. II: ***Dynamics*** (1940), la Cambridge University Press. De fapt, sarcina implementării și dezvoltării ideilor ***opticii hamiltoniene*** a revenit aproape în exclusivitate secolului al 20-lea prin lucrările lui ***T. Smith*** (Trans. Opt. Soc., London, **23**, 1921-1933), ***G. C. Steward*** (***The Symmetrical Optical System***, Cambridge, 1928), ***J. L. Synge*** (***Geometrical Optics, An Introduction to Hamilton's Method***, Cambridge, 1937, 1962), ***R. K. Luneburg*** (***Mathematical Theory of Optics,*** Berkeley, 1964), ***M. J. Herzberger*** (***Modern Geometrical Optics***, Interscience, 1968), ***H. A. Buchdahl*** (***An Introduction to Hamiltonian Optics***, Cambridge, 1970), ***O. N. Stavroudis*** (***The Optics of Rays, Wavefronts and Caustics***, Academic Press, 1972), ***T. Sekiguchi și K. B. Wolf*** ( ***The Hamiltonian Formulation of Optics***, Am. J. Phys., **55**, 830, 1987) și alții.

În general, orice sistem a cărui evoluție este guvernată de ecuațiile lui Hamilton (vezi secțiunea 1.2, ecuația (64)) are multe proprietăți remarcabile cum este, de exemplu, ***teorema lui Liouville***, conform căreia elementele de volum în spațiul fazelor se conservă. Să considerăm, pentru simplitate, problema optică unidimensională, cu traiectoria $x(z)$ și direcția de propagare $p_x(z)$ a razei, astfel că elementul de volum din spațiul fazelor devine elementul de arie $dx.dp_x$ . Această arie elementară reprezintă un fascicul îngust de raze de lumină care trec printre punctele $x$ și $x+dx$ și au direcția de propagare între $p_x$ și $p_x+dp_x$ . Conform teoremei lui Liouville, această arie se conservă de-a lungul traiectoriei astfel că, luând două puncte oarecare ale acesteia $P_1(z_1)$ și $P_2(z_2)$ , avem $dx_1.dp_{x_1}=dx_2.dp_{x_2}$ , cum este ilustrat în fig.A.5. Cu ajutorul unui sistem optic putem, de exemplu, să obținem o lățime $dx_2$ mai mică dar cu o împrăștiere $dp_{x_2}$ a direcțiilor razelor mai mare, sau invers. Această proprietate fundamentală a spațiului fazelor este o consecință directă a teoremei lui Liouville și reprezintă esența relațiilor de incertitudine în optica ondulatorie și în mecanica cuantică. În general, formalismul hamiltonian a deschis drumul spre o analogie profundă între optică și mecanică, reprezentând totodată un instrument puternic pentru

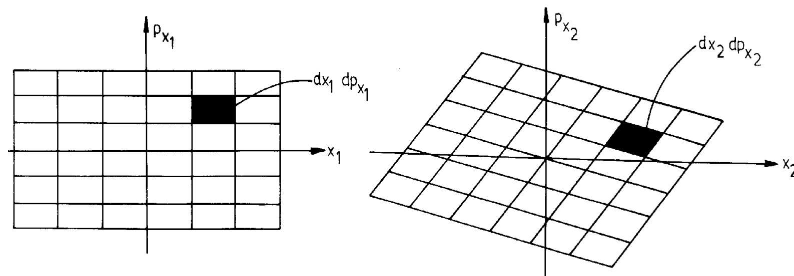



**Fig.A.5.** Ilustrarea conservării elementului de arie (teorema lui Liouville).

descrierea duală, prin traiectorii și undele asociate, a fenomenelor naturii. Cum se știe, relevanța sa contemporană este legată de formularea mecanicii cuantice și de reprezentările mișcării la scară microscopică.

Ultimele decenii au marcat o seamă de rezultate teoretice noi prin care domeniul clasic al opticii geometrice a fost considerabil extins. Astfel, ***J. Keller*** și colaboratorii săi (Appl. Phys. Letters, **28**, 426, 1957; J. Opt. Soc. Amer., **52**, 2, 1962) dezvoltă o teorie geometrică a difracției pornind de la generalizarea invariantului lui Descartes. Rezultatele obținute constituie un progres net față de teoria lui Kirchhoff (1883), a cărei valabilitate este limitată la distanțe mari (>> λ) față de planul aperturii pe care are loc difracția luminii. Pornind pe o cale opusă, ***K. Miyamato și E. Wolf*** (J. Opt. Soc. Amer., **52**, 615, 626, 1962) dezvoltă ideile lui ***B. B. Baker și E. T. Copson*** (***The Mathematical Theory of Huygens'Principle***, Oxford, 1939) și ***A. Rubinowicz*** (***Die Beugungswelle in der Kirchhoffschen Theorie der Beugung***, Warsaw, 1957), ajungând la concluzia că integrala lui Kirchhoff pe suprafața aperturii poate fi pusă sub forma unei integrale de linie pe conturul acesteia. Se restaurează astfel explicația inițială dată de Thomas Young figurilor de difracție, care considera că acestea reprezintă interferența undei primare incidente cu undele secundare generate de conturul aperturii. ***M. Kline și I. W. Kay*** (***Electromagnetic Theory and Geometrical Optics***, Interscience, 1965) continuă opera lui ***R. K. Luneburg*** (***Mathematical Theory of Optics***, Berkeley, 1964) elaborând metode aproximative care leagă teoria electromagnetică a luminii de optica geometrică și teoria difracției. În cartea noastră, pentru simplitate, am preferat să pornim de la ecuația scalară a undelor armonice, atât pentru deducerea ecuației eiconalului, conform demonstrației lui ***Arnold Sommerfeld*** și ***Iris Runge*** (***Anwendung der Vektor-rechnung auf die Grundlagen der Geometrischen
**1911** ***Optik***, Ann. d. Physik, **35**, 277, 1911), cât și pentru elaborarea teoriei scalare a difracției a lui ***Gustav Robert Kirchhoff*** (***Zur Theorie der Lichtstrahlen***, Ann. d. Physik, **18**, 663, 1883). Mai recent, ***P. Hillion*** (J. Optics, **10**, 11, 1979), prin liniarizarea ecuației eiconalului, a dezvoltat o teorie care permite descrierea câmpurilor optice polarizate. O altă direcție a fost marcată de ***D. Gloge și D. Marcuse*** (J. Opt. Soc. Amer., **59**, 1629, 1969) care pornesc de la principiul lui Fermat și realizează o cuantificare a razelor de lumină, demonstrând, pe această cale, că fasciculele gausiene sunt asociate unor pachete de undă de împrăștiere minimă. Aceste idei au fost amplu dezvoltate prin aplicarea metodelor de grupuri și algebre Lie în optică (***Lie Methods in Optics***, editori J. Sánchez-Mondragón și K. B. Wolf, în Lecture Notes in Physics, vol. **250**, Springer, 1986), metode folosite cu succes și în mecanica cuantică. Formalismul hamiltonian se dovedește astfel a fi capabil să descrie proprietățile geometrice, ondulatorii și cuantice, rădăcinile sale adânci constând în geometria simplectică a spațiului fazelor (***J. Sniatycki, Geometric Quantization and Quantum Mechanics, Springer, 1980; V. Guillemin și S. Sternberg, Symplectic Techniques in Physics***, Cambridge, 1984). Remarcăm, în fine, succesele recente ale aplicării grupurilor Lie în studiul aberațiilor geometrice de ordin superior.

În timp ce Hamilton reînvia înseși bazele opticii teoretice, modelând optica geometrică și mecanica clasică în cadrul preluat, peste o

sută de ani, de mecanica cuantică, progrese considerabile erau realizate în domeniul opticii instrumentale și experimentale. Astfel, ***L. Schleiermacher*** a inițiat teoria vignetării și a propus metoda celor mai mici pătrate pentru optimizarea parametrilor sistemelor optice (***Über den Gebrauch der analytischen Optik***, Poggendorff Annalen, **14**, 1828; ***Analytische Optik***, Darmstadt, 1842). Marii matematicieni Cauchy și Gauss au continuat opera de optică a lui Euler care, cum am arătat mai înainte, s-a străduit mulți ani ca să compenseze dispersia culorilor într-un ansamblu de lentile. Astfel, ***Augustin Louis Cauchy*** (1789-1857) a izbutit să dea o primă bună aproximație a formulei de dispersie în medii transparente, în ***Mémoire sur la dispersion de la lumière***, 1836 (vezi și secțiunea 2. 7, relația (262)) și a introdus indicii de refracție complexi pentru a explica reflexia metalică. ***Karl Friedrich Gauss*** (1777-1855) a efectuat cercetări sistematice ale proprietăților sistemelor optice centrate traversate de raze paraxiale, introducând noțiunile de plane conjugate și plane principale, care au facilitat considerabil studiul instrumentelor complexe (***Dioptrische Unterschungen***,
**1843** 1843). ***Giovani Battista Amici*** (1786-1863) a folosit proprietatea de aplanetism a punctelor Wierstrass pentru construcția obiectivelor de microscop de mare apertură numerică (Ann. de chim. et phys., **12**, 117, 1844) și a introdus metoda imersiei (vezi și secțiunea 2. 1, fig.24). ***James Clark Maxwell*** (1831-1879) a contribuit la optica geometrică cu exemplul clasic de instrument optic perfect realizat cu distribuția "ochi de pește" - vezi
**1854** secțiunea 3. 3 (Cambridge and Dublin Mathematical Journal, **8**, 188, 1854; Quart. Journ. of Pure and Applied Mathematics, **2**, 233, 1858; pentru generalizări interesante, inclusiv lentilele Luneburg, vezi R. Stettler, ***Optik,*** **12**, 529, 1955). Profunzimea operei lui Maxwell poate fi comparată doar cu cea a lui Newton și a lui Einstein. Cum se știe, geniului marelui fizician scoțian îi datorăm teoria electromagnetică și ecuațiile care-i poartă numele (***A Dynamical Theory of the Electromagnetic Field***, Phil. Trans. Roy. Soc.
**1865** London, **155**, 459, 1865; ***A Treatise on Electricity and Magnetism***, Oxford, 1873), prima mare unificare a fenomenelor electrice, magnetice și optice, unul din cele mai mari triumfuri intelectuale ale tuturor timpurilor. Interpretăm aici celebra relație $c = 1/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$ cu propriile cuvinte ale lui Maxwell: "The velocity of the transverse undulations in our hypothetical medium, calculated from the electromagnetic experiments of M. M. Kohlrausch and Weber (n.n. 1856), agree so exactly with the velocity of light calculated from the optical experiments of M. Fizeau (n.n. 1849), that we can scarcely avoid the inference that light consists in the transverse undulations of the same medium which is the cause of electric and magnetic phenomena" și " ... we have strong reason to conclude that light itself is an electromagnetic disturbance in the form of waves propagated through the
**1888** electromagnetic field according to electromagnetic laws". Curând (1888), ***Heinrich Rudolf Hertz*** (1857-1894) a încununat opera lui Maxwell prin descoperirea undelor radio (care se propagă cu aceeași viteză, se reflectă, refractă, interferă, difractă și se polarizează ca și lumina obișnuită), confirmând definitiv ipoteza că lumina și undele electromagnetice au aceeași natură. Sperăm ca teoriei electromagnetice a luminii și aplicațiilor sale să le putem dedica, ulterior, o altă carte.

Dacă Fraunhofer a deschis drumul corectării precise a aberațiilor cromatice și construcției obiectivelor telescopice refractoare moderne încă din anul 1817, problema aberațiilor geometrice avea să-i aștepte pe Seidel și
1843 Petzval până în anii 1856-1857. Între timp, cum am văzut, Gauss (1843) a dat o formă elegantă teoriei de ordinul întâi, în care invariantul lui Descartes $n \cdot \sin\theta$ se scrie simplu $n \cdot \theta$, ceea ce implică un fascicul îngust de raze în jurul axului optic $(\theta \lesssim 0,1\ radiani \cong 6^o)$. Sub impulsul invenției și perfecționării aparatelor și tehnicilor fotografice (Niépce, 1826; Talbot, 1835; Daguerre, 1839; E. Becquerel și Draper, 1842; Foucault și Fizeau, 1845; Bond, 1850; De la Rue, 1860; Cros și Ducos du Haro, 1868; Eastmann, 1888; Lippmann, 1893; și mulți alții) apare noua sarcină de realizare a obiectivelor cu apertură și câmp de vedere mare și, în consecință, de extensie a teoriei sistemelor optice în domeniul extraparaxial. Evident, o aproximație mai bună avem dacă reținem primii doi termeni din dezvoltarea $\sin\theta = \theta - (1/3!)\theta^3 + (1/5!)\theta^5 - (1/7!)\theta^7 + ...$ , adică în cadrul unei teorii de ordinul al treilea. Abaterea care rezultă în acest caz de la teoria de ordinul întâi va conduce (vezi secțiunea 2. 8) la cele cinci aberații primare (aberația sferică, coma, astigmatismul, curbura câmpului și distorsia), denumite și aberațiile lui Seidel, după numele lui ***Ludwig von Seidel*** (1821-1896), care le-a studiat sistematic pentru prima dată (***Zur Dioptrik, über die Entwicklung der Gliedern 3-ter Ordnung***, Astron. Nachr., **43**, 289, 305,
1856 321, 1856). Ulterior analiza lui Seidel a fost simplificată de mulți autori (în cartea noastră, de exemplu, am preferat metoda sugerată în notele, nepublicate, ale lui Edward L. O'Neill) și extinsă, prin diverse tehnici, la studiul aberațiilor geometrice de ordin superior. Cum am arătat, lentila convergentă simplă a fost folosită de mult la camera obscură (vezi della Porta, 1589) ca și la realizarea primei fotografii (Niépce, 1826), dar primele dagherotipii erau deja realizate cu un obiectiv dublet acromat (Chevalier, 1830). Timpii de expunere erau însă foarte mari din cauza diafragmării puternice, necesară pentru atenuarea aberațiilor geometrice. În particular, spre deosebire de telescoapele obișnuite, curbura câmpului și distorsia nu mai pot fi tolerate la un bun obiectiv fotografic. Primul mare succes teoretic și practic a fost obținut de ***Josef Max Petzval*** (1807-1891), care a studiat în detaliu aberația de curbură a câmpului, a dedus condiția de aplatizare a imaginii (vezi secțiunea 2. 8, ecuația (320) și a realizat, pe bază de calcule prealabile, obiectivul fotografic rapid pentru portrete (***Bericht über die Ergebnisse einiger dioptrischer Untersuchungen***, Pesth, 1843; ***Bericht über optische Untersuchungen***, Ber. Keis. Akad. Wien, Math. - naturwiss. Kl. **24**, 50, 92, 129, (1857)). ***Obiectivul "aplanat"*** al lui Petzval, compus din doi dubleți separați, caracterizat prin luminozitate mare dar câmp vizual mic, a fost perfecționat de Steinheil (1860) și Dallmeyer (1866) care, făcând dubleții separați simetrici, au eliminat și aberația de distorsie, mărind totodată foarte mult și câmpul de vedere.

O altă realizare remarcabilă din această perioadă constă în descoperirea ***metodei "schlieren"*** sau ***"knife - edge"*** (vezi Cap.III) de către ***L. Foucault*** (***Mémoire sur la construction des télescopes en verre argenté***,
1859 Ann. de l'Observatoire Imp. de Paris, **5**, 197, 1859) și, în mod independent,

de ***A. Töpler*** (***Beobachtungen nach einer neuen optischen Methode***, Bonn,
1865 1864; Pogg. Ann. Physik u. Chem., **127**, 556, 1866).

Înainte de a trece la "momentul Abbe" vom mai nota câteva acumulări de seamă din istoria opticii secolului 19. Astfel, marele astronom ***Sir George Biddell Airy*** (1801-1892) a fost probabil primul care a corectat astigmatismul, folosind o lentilă sfero-cilindrică pentru ameliorarea propriului astigmatism miopic (1825). Amplificarea în practica oftalmologică curentă a acestei metode va avea loc însă abia după anul 1862, an în care olandezul ***Franciscus Cornelius Donders*** (1818-1889) a publicat tratatul său privind lentilele cilindrice și astigmatismul. Airy a studiat în detaliu formarea imaginilor prin telescop și precizia observațiilor astronomice. Din cele peste 500 de publicații ale sale, de importanță deosebită pentru stabilirea limitei de aplicabilitate a opticii geometrice și puterea de rezoluție a instrumentelor optice este lucrarea în care a calculat difracția Fraunhofer pe apertura circulară (***On the Diffraction of an Object
1835 Glass with Circular Aperture***, Trans. Cambridge Phil. Soc., **5**, 283, 1835).
Maximul central, în care este concentrată 83,9% din energia difractată, reprezintă un spot strălucitor circular (***discul lui Airy***) de rază unghiulară $\gamma$ dată de celebra formulă

$$\sin\gamma = 1,22\frac{\lambda}{D} .$$

De numele său sunt legate de asemenea teoria ondulatorie a curcubeului, (vezi ***F. Uliu***, ***Istoria curcubeului - De la Noe la Mie***, Ed. EMIA și UNIVERSITARIA, Deva-Craiova, 2005) ca și funcția lui Airy din teoria interferenței multiple.

***Lord Rayleigh, John William Strutt*** (1842-1919) a fost primul care a introdus un criteriu practic și simplu ($\gamma_{min} = 1,22\lambda/D$, vezi formula (249)) pentru a caracteriza puterea de rezoluție a instrumentelor optice, pentru surse de lumină necoerente (***Investigations in Optics with special
1879 reference to Spectroscope,*** Phil. Mag., **8**, 261, 1879). În fine, mai notăm
cele două criterii simple de stigmatism (vezi cap. I, secțiunea 1. 3, ecuația (98) și ecuațiile (102), respectiv (112)) și anume ***condiția de stigmatism axial***, dedusă de ***Sir William Herschel*** (Phil. Trans. Roy. Soc., **111**, 226, 1821) și ***condiția de stigmatism transversal***, dedusă mai întâi de unul din creatorii termodinamicii, ***Rudolf Julius Emanuel Clausius*** (Pogg. Ann., **121**, 1, 1864) și de marele fiziolog și fizician ***Hermann Ludwig Ferdinand von Helmholtz*** (Pogg. Ann. Jubelband, 557, 1874) din considerații termodinamice. Importanța ultimei condiții pentru proiectarea sistemelor optice a fost însă sesizată abia după redescoperirea ei de către ***Ernst Karl Abbe*** (Jenaische Ges. Med. u. Naturwiss., 129, 1879).

Ultima treime a secolului 19 este dominată de personalitatea fizicianului optician ***Ernst Karl Abbe*** (1840-1905), profesor la Universitatea din Jena, care, în strânsă colaborare cu constructorul de microscoape ***Carl Zeiss*** (1816-1888) și chimistul specializat în sticle optice ***Otto Schott*** (1851-1935), a pus bazele teoretice, tehnice și tehnologice ale microscopiei optice moderne (vezi Ernst Abbe: ***Beiträge zur Theorie des Mikroskops und***

***der mikroskopischen Wahrnehmung***, Arch. f. mikr. Anat., **9**, 413, 1873; ***Die optischen Hilfsmittel der Mikroskopie***, Braunschweig, 1878; ***Gesammelte Abhandlungen***, Gustav Fisher, Jena, 3 volume, 1904-1906. O expunere generală a teoriei lui Abbe a instrumentelor optice a fost publicată de colaboratorul său S. Czapski, ***Theorie der optischen Instrumente***, 1893; vezi și S. Czapski, O. Eppenstein, ***Grundzüge der Theorie der Optischen Instrumente nach Abbe***, J. A. Barth, Leipzig, 1924). Pentru a ilustra impactul acestor realizări, amintim că cercetările de microbiologie și bacteriologie ar fi fost imposibile fără microscoape cu puterea de rezoluție până la limita teoretică de difracție. Ca și Fraunhofer în timpul său, Abbe a reprezentat o combinație unică de geniu științific, proiectant și inventator, demonstrând în mod strălucit interacția fertilă dintre știința pură și aplicată. Spre deosebire, însă, de obiectivele de telescop și fotografice, realizarea microscoapelor de performanță a întârziat datorită dificultăților întâmpinate în șlefuirea, cu toleranțe controlabile, a lentilelor mici, în îmbunătățirea substanțială a sticlelor optice pentru acromatizare și în înțelegerea fenomenelor de difracție inerente observării microobiectelor cu sisteme corect calculate din astfel de lentile. Istoria momentului Abbe-Zeiss-Schott poate fi rezumată în următoarele evenimente:

***1846***, Carl Zeiss este mecanic și lector la Universitatea din Jena și, la sugestia biologului J. Schleiden (1804-1881), începe să construiască microscoape.

***1861***, Carl Zeiss este distins cu medalia de aur la Expoziția Industrială din Turingia pentru microscoapele sale de bună calitate, dar realizate după metoda empirică, tradițională, de încercare și eroare.

***1866***, Carl Zeiss și cei douăzeci de oameni din micul său atelier din Jena produseseră circa o mie de astfel de microscoape, în condițiile unei grele concurențe cu firma Hartnack din Paris, care realizase, încă din 1859,
**1865** obiective cu imersie în apă. Zeiss începe să colaboreze cu Abbe, pe atunci lector la Universitatea din Jena, pentru a pune construcția microscoapelor pe baze științifice. Abbe și-a concentrat mai întâi eforturile pentru construcția și introducerea în atelierul lui Zeiss a numeroase instrumente de măsură și control, de precizie:

***1867***, focometrul lui Abbe, pentru măsurarea distanțelor focale ale obiectivului și a lentilelor sale componente;

***1869***, refractometrul lui Abbe, publicat în Jenaische Ges. Med. u. Naturwiss, **8**, 96, 1874, pentru determinarea indicilor de refracție ai probelor de sticlă și de lichide din măsurători ale unghiului limită de reflexie totală; în același an, condensorul lui Abbe, pentru iluminarea probelor pentru orice apertură unghiulară $\gamma_1$ în intervalul maxim posibil ($\pm 90^o$) ;

***1870***, apertometrul lui Abbe, pentru determinarea ***aperturii numerice*** $AN = n_1 \sin\gamma_1$ a obiectivelor de microscop, unde $n_1$ este indicele de refracție al mediului de imersie (aer, apă, ulei etc.) dintre obiect și lentila frontală a obiectivului iar $\gamma_1$ este unghiul dintre raza marginală și axul optic. Conceptul de apertură numerică a fost introdus de Abbe deoarece, după numeroase experiențe, a stabilit că această mărime controlează strălucirea imaginii și puterea de rezoluție a obiectivelor de microscop (plane conjugate apropiate), spre deosebire de ***numărul*** $= f/D$, care este mărimea relevantă

când obiectele sunt îndepărtate (telescop, obiectiv fotografic). Abbe a demonstrat, mai întâi experimental, apoi pe baza teoriei de difracție, că distanța minimă $(\delta r_1)_{min}$ dintre două puncte obiect care mai pot fi rezolvate în imagine (adică inversul puterii de rezoluție spațială) este proporțională cu $\lambda_0$ și invers proporțională cu $AN$ (vezi secțiunea 2.1, ecuația (123)). Consecința imediată a acestor cercetări a fost aceea că, începând din anul 1872, firma Zeiss va deveni vestită prin performanțele microscoapelor sale, primele bazate pe o teorie corectă și precalcul matematic. Abbe devine partenerul lui Zeiss (1875).

*1871*, Abbe publică studiile sale privind intensitatea luminii din instrumentele optice, în care elaborează teoria diafragmelor și pupilelor (Jenaische Ges. Med. u. Naturwiss., **6**, 263, 1871). Aceste cercetări vor fi extinse mai târziu de ***M. von Rohr*** (Zentr. Ztg. Opt. u. Mech., **41**, 145, 159, 171 (1920)).

**1873** *1873*, publică lucrarea sa fundamentală "***Contribuții la teoria microscopului și a percepției microscopice***" (op. cit.) în care pune, pentru prima dată, ***bazele teoriei de difracție a formării imaginilor***. O astfel de teorie s-a impus cu necesitate în cazul observării micro-obiectelor cu detalii de ordinul lungimii de undă, când contribuția luminii difractate nu mai poate fi neglijată. Pentru a ilustra teoria lui Abbe, să considerăm un astfel de obiect de forma unei aperturi circulare $P_1P_2$ , iluminat de o undă plană incidentă normal pe planul obiectului (vezi fig. A.6).

Undele difractate de obiect sunt mai întâi focalizate de sistemul obiectiv în planul său focal posterior, unde formează figura de difracție Fraunhofer corespunzătoare, cu maximele (spectrale) de diverse ordine în $S_0$, $S_{\pm1}$, $S_{\pm2}$ ș.a.m.d., apoi se propagă mai departe, interferă și în final, formează imaginea inversată a obiectului în planul imagine al obiectivului. Acum este evident că, pentru a obține o imagine cât mai fidelă, este necesar ca apertura unghiulară $\gamma_1$ (mai general, apertura numerică $AN = n_1 \sin\gamma_1$ ) a obiectivului să fie cât mai mare pentru ca la formarea imaginii să-și aducă contribuția cât mai multe spectre (frecvențe spațiale). În acest mod a explicat Abbe celebra sa formulă a limitei teoretice de rezoluție spațială $(\delta r_1)_{min} = C \cdot \lambda_0/(n_1 \sin\gamma_1)$ unde constanta C este de ordinul unității ($C = 0,82$ pentru iluminarea coerentă și $C = 0,61$ pentru iluminarea necoerentă, vezi aceste detalii în ***M. Born, E. Wolf, Principles of Optics***, Pergamon, 1986, p. 418-424). Cum am arătat, grosismentul util al microscopului este limitat de rezoluția spațială a obiectivului și a ochiului observatorului (vezi cap. I, secțiunea 2.5), ocularul servind numai pentru a

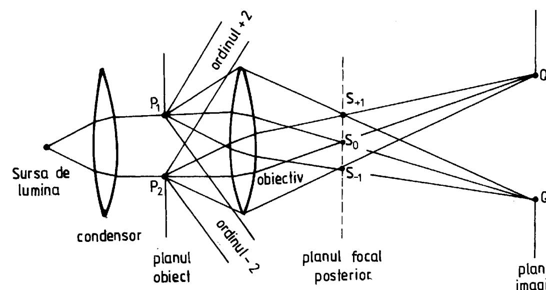


**Fig. A.6.** Teoria lui Abbe a formării imaginii în microscop (apertură circulară).

prezenta ochiului, sub un unghi de vedere convenabil, imaginea (intermediară) formată și rezolvată de obiectiv. Abbe și-a confirmat teoria prin numeroase experiențe ingenioase (vezi și K. Michel, ***Die Grundlagen der Theorie des Mikroskops***, Stuttgart, 1950; K. Kranje, ***Simple Demonstration Experiments in the Abbe Theory of Image Formation***, Am. J. Phys., **30**, 342, 1962), a căror dezvoltare a condus pe urmașii săi la multe descoperiri importante cum este, de exemplu, ***metoda contrastului de fază***,
1935 elaborată de fizicianul olandez ***Frits Zernike*** (1888-1966) în anii 1932-1934 și pentru care acesta a fost onorat cu premiul Nobel pentru fizică, în anul 1953 (F. Zernike, ***Beugungstheorie der Schneidenverfahrens und seiner verbesserten Form, der Phasenkontrastmethode***, Physica, **1**, 689, 1934; Zs. Tech. Phys., **16**, 454, 1935; Phys. Zs., **36**, 848, 1935; Physica, **9**, 686, 974, 1942; ***How I Discovered Phase Contrast***, Science, **121**, 345, 1955; pentru prezentarea detaliată a metodei contrastului de fază v. M. Françon, ***Le contrast de phase en optique et en microscopie***, Paris, Revue d'Optique, 1950; A. H. Bennett, H. Jupnik, H. Osterberg, O. W. Richards, ***Phase Microscopy***, New York, Wiley, 1952). Zernike însuși a calificat metoda sa ca o aplicație logică a teoriei lui Abbe cu privire la formarea imaginii în microscop pentru obiecte transparente de grosime optică neuniformă (***obiecte de fază***), cum sunt frecvent întâlnite în biologie și cristalografie, obiecte care modifică numai faza dar nu și amplitudinea undei incidente. Ideea metodei lui Zernike constă în plasarea unei plăci transparente subțiri (***placa de fază***) în planul focal posterior al obiectivului astfel că faza ordinului central $S_0$ este avansată sau retardată cu $\pi/2$ față de celelalte ordine de difracție și, în consecință, imaginea invizibilă a obiectului de fază (transparent) devine vizibilă (contrastată), ca și a unui obiect de amplitudine (absorbant); diferențele de fază din obiectul de fază sunt transformate astfel în diferențele corespunzătoare de strălucire sau intensitate ale imaginii. Deoarece planul focal posterior al obiectivului este, de regulă, localizat în interiorul sistemului de lentile care îl compun, placa de fază este "încorporată" în obiectiv. Rezonanța actuală a teoriei lui Abbe este profundă și fertilă, exemplul microscopului permițând sesizarea conceptului de ***filtraj spațial***, înțelegerea semnificației transformărilor Fourier în formarea imaginilor și dezvoltarea unui nou domeniu al opticii, optica Fourier și prelucrarea optică a informației.

1879 ***1879***, Abbe stabilește forma generală a condiției necesare de aplanetism sau ***condiția de sinus*** care îi poartă numele (op. cit.), suplimentată ulterior cu condiția de izoplanetism de către ***F. Staeble*** (Münchener Sitz. - Ber., 183, 1919) și ***E. Lihotzky*** (Wiener Sitz. - Ber., **128**, 85, 1919), condiții care reprezintă criteriile majore de corecție în proiectarea sistemelor optice moderne.

***1879***, Abbe introduce obiectivul acromat (pentru două lungimi de undă) cu imersie omogenă (ulei), având o apertură numerică $AN = 1,25$. Perfecționarea mai departe a acestor obiective impunea însă producerea unor noi tipuri de sticlă, care să permită combinații de sticlă de indice de refracție mic și dispersie mare cu sticlă de indice de refracție mare și dispersie mică. Din fericire, în anul 1879, Abbe își găsește partenerul ideal pentru rezolvarea problemei noilor sticle în persoana chimistului ***Otto Schott***, împreună cu

care, după câțiva ani de mari eforturi, va reuși să construiască celebrele sale ***obiective apocromate***, care satisfac condițiile de acromatizare pentru trei culori și condiția de sinus (aplanetism) pentru două culori (Jenaische Ges.
**1886** Med. u. Naturwiss., 1886). Obiectivul apocromat al lui Abbe (obiectiv cu imersie, compus din zece lentile, $f = 2\,mm$, $AN = 1,4$ ), livrat de firma Zeiss începând din anul 1886, va deschide o nouă epocă în observațiile vizuale cele mai fine și în microfotografie, puterea sa de rezoluție atingând limita teoretică de difracție.

***1884***, se înființează întreprinderea de sticlă "Jenaer Glaswerke Schott und Genossen" care, în 1886, deja producea 44 de tipuri de sticlă optică, de calitate și varietate nemaiîntâlnită până atunci.

**1889** ***1889***, Abbe prezintă obiectivul său acromat de cea mai înaltă performanță, cu imersie în monobrom-naftalen ($AN = 1,6$) .

***1889***, după moartea lui Carl Zeiss (1888), Abbe rămâne singurul proprietar al firmei și înființează Fundația Carl Zeiss pentru cercetări științifice și îmbunătățiri sociale (Carl Zeiss Stiftung), devenind un mare pionier și în domeniul reformelor sociale.

În afară de cele enumerate, multe alte dispozitive și instrumente de precizie sunt legate de numele lui Abbe, cum sunt spectrometrul lui Abbe (pe principiul autocolimării), pentru determinarea rapidă a indicelui de refracție și dispersiei sticlelor (1874), interferometrul lui Abbe, de testare comodă a plăcilor plan-paralele (1885), ocularele de proiecție pentru microfotografie (1886), sistemul de iluminare cu oglindă și lentile cunoscut sub numele de condensorul lui Abbe (1886), microscopul comparator (1891), o versiune îmbunătățită a dilatometrului interferențial al lui Fizeau pentru determinarea coeficienților de dilatare termică a sticlelor (1893), sistemul lui Abbe cu prisma Porro pentru inversarea imaginii în telescoape terestre (1895), dezvoltă în cadrul firmei Zeiss noile secții de telemetrie binoculară, de obiective fotografice și de telescoape astronomice. Mai departe, Abbe își dezvoltă ideile prin colaboratorii săi apropiați dintre care amintim pe ***Carl Pulfrich*** (1858-1927), inventatorul stereocomparatorului, stereolocatorului și fotometrului care îi poartă numele, și pe ***P. Rudolph*** care, prin invenția "anastigmatelor" (1890), a marcat nașterea obiectivelor fotografice moderne (cum este, de exemplu, binecunoscutul obiectiv Tessar, creat de el în 1902). Pentru o descriere mai detaliată a numeroaselor realizări ale lui Abbe în optică vezi M. von Rohr ***Ernst Abbe***, Fischer Verlag, Jena, 1940; N. Guenther, ***Ernst Abbe, Schöpfer der Zeiss - Stiftung***, Fischer Verlag, Stuttgart, 1951; F. Schomerus, ***Werden und Wessen der Carl Zeiss-Stiftung***, Fischer Verlag, Stuttgart, 1955; H. Volkmann, ***Ernst Abbe and his Work***, Appl. Optics, **5**, 1720, 1966; ***Jenaer Rundschau*** (***Jena Review***), No. 3, 1973, număr dedicat aniversării a 100 de ani de la elaborarea de către Abbe a bazelor teoretice și practice ale microscopiei optice moderne.

Dintre diferitele metode de iluminare a obiectelor transparente mai amintim condensorul lui A. Köhler (Zs. f. wiss. Mikroskopie, **10**, 433, 1893; **16**, 1, 1899), iluminarea critică (F. Zernike, Physica, **5**, 794, 1938) și, în ultimul timp, condensoarele asferice cu numere $f$ foarte mici care asigură o mare densitate de flux luminos pe obiect (vezi lentilele asferice prezentate în Cap. I, secțiunea 1.3).

Cele mai mari contribuții la dezvoltarea opticii geometrice fundamentale din secolul nostru au fost aduse de ***Alvar Gullstrand*** (***Allgemeine Theorie der monochromatischen Aberrationen***, Acta Reg. Soc. Sci. Uppsala, **3**, 1900; ***Die reele optische Abbildung***, Svenska Vetensk. Handl., **41**, 1, 1906; ***Tatsachen und Fiktionen in der Lehre der optischen Abbildung***, Arch. Optik, **1**, 1, 81, 1907; ***Das allgemeine optische Abbildungssystem***, Svenska Vetensk. Handl., **55**, 1, 1915), ***Thomas Smith*** (***On Tracing Rays through an Optical System***, Proc. Phys. Soc. London, **28**, 502, 1915; **30**, 221, 1918; **32**, 252, 1920; **33**, 174, 1921; **57**, 286, 1945), ***H. Boegehold*** (***Über die Entwicklung der Theorie der optischen Instrumente seit Abbe***, Ergeb. d. exakt. Naturwiss., **8**, 1929; ***Raumsymmetrische Abbildung***, Z. Instrumentenk., **56**, 98, 1936), ***M. Hertzberger*** (***Strahlenoptik***, Springer, Berlin, 1931; ***Modern Geometrical Optics***, Interscience, New York, 1968) și ***G. Slusarev*** (***Metodi di calcolo dei sistemi ottici***, Firenze, 1943; ***Geometriceskaia optika***, Moskva, 1946). Pentru contribuțiile sale în domeniul oftalmologiei (astigmatismul și formele anormale ale corneei, lentile de corecție după îndepărtarea cristalinului cataractic), Gullstrand a fost distins cu premiul Nobel pentru fiziologie și
**1911** medicină (1911). Prin introducerea metodelor de algebră matriceală în trasarea razelor (ray tracing) și proiectarea instrumentelor optice, T. Smith a devenit unul din marii profesori ai generației următoare de opticieni. În prima lucrare (op. cit.), Boegehold face o sinteză a celor mai importante realizări în optica geometrică din primii 30 de ani ai secolului al 20-lea. Herzberger aplică la optica geometrică ideile fundamentale ale lui Hamilton (vezi și controversa sa creatoare cu Synge) și dezvoltă modele matematice pentru sistemele optice. Slusarev face o amplă analiză a aberațiilor Seidel și a metodelor de calcul optic. În fine, în anii 40-50 ai secolului al 20-lea, mai reamrcăm elaborarea teoriei de difracție a aberațiilor de către ***B. R. A. Nijboer***, ***F. Zernike*** și ***N. G. van Kampen*** (vezi M. Born și E. Wolf, ***Principles of Optics***, Pergamon, 1986, cap. IX).

Cum am arătat, noile sticle optice introduse de Schott (cum este, de exemplu, sticla crown cu stabilizator de oxid de bariu (BaO), introdus în compoziție sub formă de nitrat ($Ba(NO_3)_2$) sau carbonat ($BaCO_3$) de bariu, având indice de refracție mare și dispersie mică) au revoluționat corectarea sistemelor dioptrice de aberații cromatice și geometrice. Astfel, la baza obiectivelor fotografice de astăzi stau ***anastigmatele*** lui P. Rudolph (firma Zeiss) și H. D. Taylor (firma Cooke), sisteme acromatizate caracterizate prin corectarea curburii câmpului, astigmatismului și comei pentru câmpuri unghiulare mari, și perfecționate mai departe de Wandersleb, Merté, Bertele, Zollner, ș. a. Pentru prezentări mai ample vezi W. Merté, R. Richter, M. von Rohr, ***Das photographische Objectiv***, Springer 1932; E. Wandersleb, ***Die Lichtverteilung im Grossen im der Brennebene des photographischen Objektivs***, Akademie Verlag, Berlin, 1952; J. Flügge, ***Das photographische Objektiv***, Springer, 1955.

În zilele noastre, proiectarea sistemelor dioptrice a devenit din ce în ce mai mult o problemă de automatizare în care metodele matriceale joacă un rol important. Astfel, se pot scrie programe care fac posibilă proiectarea automată, de la simpla trasare a razelor și până la proiectarea sistemelor de

cea mai înaltă performanță, în care sunt corectate aberațiile de ordinul trei, patru și chiar mai înalt. Pentru introducere, vezi D. P. Feder, ***Automatic Optical Design***, Applied Optics, **2**, 1209, 1963.

Marea majoritate a sistemelor de lentile și oglinzi au suprafețe sferice, ușor de fabricat cu precizia optică necesară (toleranțe << λ), dar care pun problema corectării aberațiilor inerente. Există însă și instrumente optice de înaltă performanță care conțin elemente cu suprafețe asferice (carteziene, toroidale, cilindrice), în ciuda dificultăților de realizare (vezi T. Sakurai, K. Shishido, ***Study on the fabrication of aspherical surfaces***, Appl. Optics, **2**, 1181, 1963). În general, stigmatismul axial riguros al sistemelor optice centrate se poate realiza cu o suprafață asferică iar aplanetismul cu două. Un astfel de sistem (obiectiv aplanetic de telescop cu câmp unghiular mare, compus din două oglinzi asferice) a fost calculat de ***Karl Schwarzschild*** (***Theorie der Spiegeltelescope***, Abh. Königl. Gesellsch. d. Wiss. zu
**1905** Göttingen, Math. - physik. Klasse, **4**, 1905) și a fost aplicat mai ales în microscopie (vezi D. S. Gray, ***A New series of Microscope Objectives***, Journ. Opt. Soc. Amer., **39**, 723, 1949; R. C. Mellors, ***The Reflecting Microscope***, Science, **112**, 381, 1950). Deși principiul microscopului reflector (deci fără aberații cromatice) fusese lansat încă de Newton și reluat mai târziu de Amici, obiectivul unui astfel de microscop fiind asemănător cu obiectivul telescopului newtonian funcționând în sens invers, ideea a fost materializată abia de ***Cecil Reginald Burch*** (Proc.
**1947** Phys. Soc., **59**, 41, 1947) pornind de la soluția analitică a lui Schwarzschild pentru sistemul aplanetic de două oglinzi. Un astfel de ***obiectiv reflector de microscop***, de mare apertură unghiulară, care amintește de obiectivul telescopului Cassegrain, este ilustrat în fig.A.7.

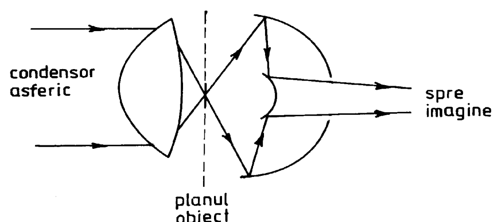



**Fig.A.7.** Obiectiv reflector de microscop (de mare apertură unghiulară)

Odată pus la punct în domeniul vizibil, acest sistem permite microfotografia și în domeniul ultraviolet, unde puterea de rezoluție spațială este mai mare. În general, sistemele catoptrice sunt larg folosite și în afara domeniului optic, începând de la focalizarea razelor X (vezi V. P. Kirkpatrik, H. H. Pattee, Jr., ***X- Ray Microscopy***, în Encyclopedia of Physics, **30**, 305 - 336, editor S. Flügge, Springer, 1957; H. Riesenberg, ***Über zentralabschattungsfreie, rotationssymmetrische Spiegel systeme mit besonderer Berücksichtigung ihrer Eignung als abbildende Optik für extrem weiche Röntgenstrahlen***, Jenaer Jahrbuch, II, 250 - 328, 1963), până la radiotelescoapele observatoarelor din Jodrell Bank (Anglia) și Parkes (Australia). Din istoria recentă a marilor telescoape optice de reflexie, cu oglinzi principale parabolice, amintim instalarea la observatorul din Mont Wilson, S.U.A., a telescoapelor cu $D = 152$ *cm*, în anul 1908 (cu oglindă șlefuită de G. W. Ritchey), și cu $D = 254$ *cm*, în anul 1918, la observatorul din Mont Palomar, S. U. A., a telescopului cu $D = 508$ *cm*, în anul 1947 (proiectat de G. E.

Hale, cu oglindă şlefuită şi aluminizată de J. D. Strong) şi, în ultimii ani, la observatorul din Caucaz, a celui mai mare telescop reflector, cu oglindă principală de diametru $D = 600\ cm$. Toate aceste mari instrumente ilustrează interacţia fertilă dintre ştiinţă şi tehnologie. În particular, elaborarea de către

**1932** ***John Donovan Strong*** (1932) a tehnologiei de aluminizare, prin evaporare, a oglinzilor de telescop a avut o profundă influenţă asupra observaţiilor astronomice. Un mare progres a fost realizat de asemenea prin construirea telescoapelor catadioptrice cu lamă refringentă corectoare (vezi cap. II, secţiunea 2.5, fig.61) de către ***Bernhard Voldemar Schmidt*** (Central

**1931** Zeitung f. Optik u. Mechanik, **52**, 1931; Mitt. Hamburg Sternwarte Bergedorf **36**, 15, 1932; vezi şi R. Schorr, Zs. f. Instrum., **56**, 336, 1936; Astr. Nachr., **258**, 45, 1936; Mitt. Hamburg Sterwarte Bergedorf, **42**, 175, 1936; C. Carathéodory, ***Elementare Theorie des Spiegelteleskops von B. Schmidt***, Teubner, Leipzig, 1940; E. H. Linfoot, ***Recent Advances in Optics***, cap. IV, Clarendon, Oxford, 1955) şi ***Dmitri Dmitrievici Maksutov*** (***Novîie Katadioptriceskie Sistemî***, Dokl. Akad. Nauk S. S. S. R., 37 - 127, 1942; ***New Catadioptric Meniscus Systems***, Journ. Opt. Soc. Amer., **34**, 270, 1944; vezi şi A. Bouwers, ***Achievements in Optics***, Elsevier, New York, 1950). Aceste instrumente performante, de câmp unghiular foarte mare, în variante de tip Gregory sau Cassegrain, au permis întocmirea de hărţi astronomice pentru tot cerul (vezi, de exemplu, pentru cerul boreal, aşa-numitul ***Sky Survey*** al observatorului de la Mount Palomar, realizat cu telescopul Schmidt cu oglindă $D = 180\ cm$ şi lamă corectoare de 120 cm diametru). În domeniul microscopiei amintim perfecţionarea obiectivului lui Burch prin realizarea obiectivului catadioptric de către D. S. Gray (op. cit., 1949), care a mărit substanţial apertura unghiulară prin adăugarea unui sistem frontal de lentile din cuarţ topit şi fluorină (transparente în ultraviolet). Mai recent, folosirea calculatoarelor de mare viteză a permis o îmbunătăţire radicală în proiectarea sistemelor optice complexe cu lentile asferice pentru cele mai diverse aplicaţii (teledetecţie, ghidare, trasare), cu performanţe până la limita naturală de difracţie, a fost atinsă o precizie extremă în polizarea elementelor optice prin bombardament ionic, a devenit de uz curent depunerea de straturi simple şi multiple (reflectante, anti-reflectante), a luat o mare amploare tehnologia materialelor pentru infraroşu, au fost introduse materialele plastice în construcţia elementelor optice (prisme, lentile, asferice, replici de reţele, fibre optice), au fost descoperite sticlele ceramice cu coeficient de dilatare termică extrem de mic.

O idee mai veche, brevetată de ***John Logie Baird*** (patent britanic 285738, 15 februarie 1928), care prezicea posibilitatea transmiterii luminii şi a imaginilor prin fibre dielectrice transparente, a fost relansată de ***Charles

**1969** Kuen Kao*** (1966) astfel că, în anul 1969, firma Corning Glass deja fabrica primele ***fibre optice*** din sticlă cu pierderi relativ mici ($\cong 20\ dB/km$), marcând momentul intrării în era comunicaţiilor prin fibre optice (vezi N. S. Kapany, ***Fiber Optics, Principles and Applications***, Academic Press, New York, 1967; D. Gloge, ***Optical Fibers for Comunications***, Appl. Optics, **13**, 249, 1974; D. Marcuse, ***Principles of Optical Fiber Measurements***, Academic Press, New York, 1981; A. B. Sharma, S. J. Halme, M. M. Butusov, ***Optical Fiber Systems and their Components***, Springer, Ser. Opt.

Sci., **24, 1981; Y. Suematsu, K. Iga,** *Introduction to Optical Fiber Communications, Wiley, New York, 1982; A. H. Cherin,* **Introduction to Optical Fibers***,* McGraw-Hill, New York, 1983). Gama diametrelor fibrelor folosite astăzi pentru ghidarea luminii la distanţă se întinde de la câţiva microni până la câteva mii de microni (firul de păr de cap uman are un diametru de circa 50 microni). Dacă diametrul fibrei este mare în comparaţie cu lungimea de undă, propagarea luminii prin fibră poate fi tratată în termenii opticii geometrice, aşa cum am făcut în cap. III, secţiunea 3.2, pentru structuri cilindrice. Dacă, însă, diametrul este comparabil cu lungimea de undă, lumina se propagă prin fibră ca printr-un ghid de undă din domeniul frecvenţelor optice ($\cong 10^{15} Hz$) , în acest caz fiind necesară aplicarea teoriei electromagnetice riguroase; această afirmaţie este valabilă şi pentru propagarea luminii în straturi dielectrice foarte subţiri. A luat astfel naştere un nou capitol al opticii aplicate denumit, pe scurt, ***optica integrată*** (S. E.
**1969** Miller, 1969). Ca şi în cazul ghidurilor cavitare metalice pentru domeniul microundelor, analiza riguroasă a propagării undelor electromagnetice luminoase în ghiduri dielectrice se face cu ajutorul ecuaţiilor lui Maxwell şi a condiţiilor la limită corespunzătoare. Lungimea de undă în domeniul optic este însă de circa $10^4$ ori mai mică decât în domeniul microundelor iar avantajele frecvenţelor optice şi ale miniaturizării corespunzătoare a ghidurilor şi circuitelor optice sunt multiple (vezi M. J. Adams, ***An Introduction to optical Waveguides***, Wiley, New York, 1981; R. G. Hunsperger, ***Integrated Optics, Theory and Technology*****,** Springer, Ser. Opt. Sci., **33**, 1984).

Încheiem aici considerentele de istoria opticii geometrice cu observaţia că, deşi această optică ne apare astăzi ca un caz limită al ecuaţiilor lui Maxwell aplicate la fenomenele de propagare a câmpurilor electromagnetice de lungime de undă foarte mică, totuşi proiectarea instrumentelor optice se bazează, de regulă, pe trasarea razelor de lumină prin sistemele considerate, deoarece rareori se întâmplă ca difracţia să depăşească aberaţiile geometrice. De asemenea, studiul fenomenelor mai fine, de natură ondulatorie, cum sunt interferenţa, difracţia şi polarizarea, implică întotdeauna evaluarea prealabilă a drumului geometric al razelor de lumină. Şi aceasta deoarece, pentru a descrie într-o primă bună aproximaţie propagarea luminii, nu avem nevoie de nici-o ipoteză cu privire la natura ei "ultimă", fiind suficiente doar reprezentările pur geometrice, aşa cum este sintetizat în următoarele cuvinte prin care Fermat se apăra de atacurile cartezienilor:

"... je ne prétends ni n'ai jamais prétendu être de la confidence secrète de la Nature. Elle a des voies obscures et cachées que je n'ai jamais entrepris de pénétrer; je lui avais seulement offert un petit secours de géometrie au sujet de la réfraction, si elle en ait eu besoin. "

(*" ... nu pretind şi nici n-am pretins vreodată că mă aflu printre confidenţii tainici ai Naturii. Ea are căi nedesluşite şi ascunse pe care n-am încercat niciodată să le pătrund; i-am oferit doar un mic ajutor din geometrie, cu privire la refracţie, asta dacă cumva ar fi avut nevoie de el."*)

Acest program minimal, realizat cu strălucire prin principiul lui Fermat și opera de optică geometrică a lui Hamilton, ar putea fi considerat ca un ***motto*** final pentru cartea noastră.

# ANEXA B

# PROBLEME DE OPTICĂ GEOMETRICĂ

**1.** Un disc circular opac, de rază r, este iluminat frontal de la o sursă sferică, cvasipunctiformă. Pe un ecran aşezat la distanţa d faţă de disc, se obţine o umbră de rază $r_1$ şi o penumbră de rază $r_2$. Presupunând că sistemul are simetrie faţă de dreapta care uneşte centrul sursei cu centrul discului şi că ecranul este perpendicular pe această axă, să se determine raza sursei sferice precum şi distanţa sursă-disc.

***Răspuns**: Rezolvarea se bazează pe rectiliniaritatea razelor de lumină ce contribuie la formarea umbrei şi penumbrei (desigur, aerul este un mediu omogen). Pe baza unor asemănări de triunghiuri se obţin formulele*

$$R_{sursa} = \frac{r(r_2 - r_1)}{r_1 + r_2 - 2r},\ X = \frac{2rd}{r_1 + r_2 - 2r}.$$

**2.** Să se scrie sub formă vectorială legile reflexiei şi refracţiei razelor de lumină la suprafaţa plană de separaţie dintre două medii transparente, omogene şi izotrope. Lumina vine din mediul 1, cu indicele de refracţie $n_1$ şi trece, prin refracţie, în mediul 2, cu indicele de refracţie $n_2$. Sensurile razei incidente, razei reflectate şi razei refractate sunt precizate prin versorii $\vec{r}_0, \vec{r}_1, \vec{r}_2$. Versorul $\vec{N}$ al normalei, în punctul de incidenţă, la suprafaţa de separaţie este îndreptat dinspre mediul 2 spre mediul 1.

***Răspuns**: Cu centrul în punctul de incidenţă I, de pe suprafaţa separatoare, se desenează un cerc cu raza egală cu o unitate şi se reprezintă în mod adecvat versorii precizaţi în enunţ. Cu ajutorul regulilor simple ale algebrei vectoriale obţinem uşor relaţiile:*

$$\vec{r}_1 = \vec{r}_0 - 2(\vec{r}_0.\vec{N})\vec{N}, \quad \textit{pentru reflexie;}$$

$$n_2\vec{r}_2 = n_1\vec{r}_0 - [n_1(\vec{r}_0.\vec{N}) + \sqrt{n_2^2 - n_1^2 + n_1^2(\vec{r}_0.\vec{N})^2}\,]\vec{N}\ , \quad \textit{pentru refracţie.}$$

*Când radicalul nu este real se produce reflexia totală.*

**3.** Folosind rezultatul problemei precedente să se arate că, după reflexii succesive pe trei oglinzi plane reciproc perpendiculare (planele xOy, yOz, zOx ale unui triedru drept), o rază de lumină se propagă pe o direcţie paralelă cu direcţia spre prima incidenţă dar în sens opus.

***Indicaţie**: Se aplică celor trei reflexii succesive formula vectorială stabilită în problema precedentă, ţinând cont că versorul $\vec{r}_1$ joacă rol dublu: el este vector emergent, după prima reflexie şi vector incident pentru a doua reflexie. La fel şi versorul $\vec{r}_2$ joacă rol dublu, de vector emergent după a doua reflexie şi de vector incident pentru a treia reflexie. În final se obţine $\vec{r}_3 = -\vec{r}_0$.*

**4.** Fie $f(x,y,z) = 0$ ecuaţia suprafeţei ce separă două medii omogene, optic transparente, cu indicii de refracţie $n_1$ şi $n_2$. Fie $A_1(x_1,y_1,z_1)$ un punct situat în mediul $n_1$ şi $A_2(x_2,y_2,z_2)$ un alt punct, situat în mediul $n_2$. Folosind principiul lui Fermat să se arate că lumina ce pleacă din punctul $A_1$, se refractă în punctul $P(x,y,z)$ de pe suprafaţa separatoare şi, după aceea, ajunge în punctul $A_2$, satisface legile refracţiei . Prin acest

procedeu, în cazul în care punctul $A_2$ este situat tot în primul mediu iar suprafaţa $f(x, y, z) = 0$ este reflectătoare, să se deducă legile reflexiei luminii.

***Rezolvare** : În coordonate carteziene, drumurile* $A_1P$ *şi* $PA_2$ *( rectilinii în mediile omogene precizate în enunţ) se scriu sub forma* $d_1 = [(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2]^{1/2}$, *respectiv* $d_2 = [(x_2 - x)^2 + (y_2 - y)^2 + (z_2 - z)^2]^{1/2}$ *iar drumul optic* $(A_1PA_2)$ *are forma* $D \equiv n_1 d_1 + n_2 d_2$. *Dacă punctele* $A_1$ *şi* $A_2$ *sunt fixe, drumul optic* $D$ *depinde doar de* $(x, y, z)$. *Fie* $P'(x' = x + \delta x, y' = y + \delta y, z' = z + \delta z)$ *un punct vecin cu* $P$ *de pe suprafaţa refractantă. Drumul optic* $(A_1P'A_2)$ *diferă de drumul optic* $D$ *prin* $\delta D = (n_1\alpha_1 - n_2\alpha_2)\delta x + (n_1\beta_1 - n_2\beta_2)\delta y + (n_1\gamma_1 - n_2\gamma_2)\delta z$, *unde* $\alpha_1 = (x - x_1)/d_1$, $\beta_1, \gamma_1$ *sunt cosinuşii directori ai direcţiei* $A_1P$ *iar* $\alpha_2 = (x_2 - x)/d_2$, $\beta_2, \gamma_2$ *sunt cosinuşii directori ai direcţiei* $PA_2$.*Conform principiului lui Fermat, în aproximaţia de ordinul întâi, variaţia drumului optic este nulă,* $\delta D = 0$, *adică* $(n_1\alpha_1 - n_2\alpha_2)\delta x + (n_1\beta_1 - n_2\beta_2)\delta y + (n_1\gamma_1 - n_2\gamma_2)\delta z = 0$. *Pe de altă parte, cele trei variaţii* $(\delta x, \delta y, \delta z)$ *mai sunt intercorelate şi prin relaţia* $\frac{\partial f}{\partial x}\delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\delta y + \frac{\partial f}{\partial z}\delta z = 0$. *Eliminăm variaţia* $\delta z$ *între ultimele două relaţii, obţinând o expresie de forma* $M\delta x + N\delta y = 0.$ *Având în vedere că variaţiile* $\delta x, \delta y$ *sunt acum independente, rezultă în mod obligatoriu că* $M = 0$ *şi* $N = 0$, *adică* $\frac{n_1\alpha_1 - n_2\alpha_2}{\partial f/\partial x} = \frac{n_1\beta_1 - n_2\beta_2}{\partial f/\partial y} = \frac{n_1\gamma_1 - n_2\gamma_2}{\partial f/\partial z} \equiv K$, *unde* $K$ *este o constantă. Acum putem scrie* $n_1\alpha_1 - n_2\alpha_2 = K(\partial f/\partial x)$ , $n_1\beta_1 - n_2\beta_2 = K(\partial f/\partial y)$, $n_1\gamma_1 - n_2\gamma_2 = K(\partial f/\partial z)$ *şi, ţinând cont că* $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ *sunt componentele versorului* $\vec{r}_1$ *de pe direcţia* $A_1P$ *iar* $(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$ *sunt componentele versorului* $\vec{r}_2$ *pe direcţia* $PA_2$, *rezultă relaţia vectorială* $n_1\vec{r}_1 - n_2\vec{r}_2 = K_1\vec{N}$, *(♦)*

*Aici* $K_1$ *este produsul lui* $K$ *cu modulul vectorului grad f, de componente* $(\partial f/\partial x, \partial f/\partial y, \partial f/\partial z)$ *iar* $\vec{N}$ *este versorul normalei în P(x,y,z) la suprafaţa separatoare . Relaţia (♦) ne arată că versorii* $\vec{r}_1, \vec{r}_2$ *şi* $\vec{N}$ *sunt coplanari (prima lege a refracţiei). Pe de altă parte, multiplicând vectorial ,în ambele părţi, cu* $\vec{N}$, *obţinem* $n_1(\vec{r}_1 \times \vec{N}) = n_2(\vec{r}_2 \times \vec{N})$, *relaţie din care rezultă invariantul cantitativ Snell-Descartes* $n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2$. *Când* $n_2$ *nu diferă de* $n_1$ *şi suprafaţa* $f(x, y, z) = 0$ *este reflectătoare, relaţia (♦) este echivalentă cu legile reflexiei.*

**5.** Fie un mediu optic neomogen, stratificat, cu indicele de refracţie având dependenţa $n(z) = n_0(1 + \alpha z)$ cu $\alpha > 0$. Să se determine traiectoria $z(x)$ a razei de lumină ştiind că , în originea O a sistemului de referinţă, versorul tangentei la traiectorie este dirijat de-a lungul axei Ox.

***Răspuns**: Se integrează ecuația (13) a razei de lumină, obținându-se curba* $z(x) = \frac{1}{\alpha}[ch(\alpha x) - 1]$, *denumită lănțișor. În vecinătatea originii, când* $x << 1/\alpha$, *obținem aproximativ* $z(x) \approx \frac{\alpha}{2}x^2$, *adică un arc de parabolă.*

**6.** Să se arate că dacă indicele de refracție al unui mediu neomogen este independent de coordonata axială z, traiectoria razei de lumină in planul xOz satisface ecuația diferențială $\frac{d^2x}{dz^2} = \frac{1}{2C^2}\frac{\partial}{\partial x}(n^2)$, unde C este o constantă (a cărei semnificație trebuie să o precizați). O relație similară este adevărată şi pentru proiecția în planul yOz a traiectoriei.

***Rezolvare**:Deoarece indicele de refracție n nu este funcție de z , din ecuația (13) a razei de lumină (în proiecție pe Oz) rezultă că* $\frac{d}{ds}(n\frac{dz}{ds}) = 0$, *adică* $ndz = Cds$, *cu* $ds = (1 + x'^2 + y'^2)^{1/2}dz.$ *De aici deducem uşor că* $C = n(x_0, y_0)(\frac{dz}{ds})_0 = n(x_0, y_0)\cos\gamma_0$, *unde* $\gamma_0$ *este unghiul dintre tangenta la raza de lumină în punctul* $(x_0, y_0)$ *şi axa Oz. Pe de altă parte însă, în cazul de față,* $C = n(x, y)(1 + x'^2 + y'^2)^{-1/2}$. *Din expresia lagrangeanului* $L = n\frac{ds}{dz} = n(x, y)(1 + x'^2 + y'^2)^{1/2}$ *şi din ecuația Lagrange corespunzătoare variabilelor x şi* $x'$, *în care se utilizează relația* $\sqrt{1 + x'^2 + y'^2} = \frac{n(x, y)}{C}$, *rezultă imediat formula din enunț.*

**7.** Pornind de la principiul lui Fermat, să se determine distribuția indicelui de refracție într-un mediu optic neomogen lipsit de aberații pentru razele cu traiectorie elicoidală ( Oz fiind axa elicelor).

***Rezolvare**: Elementul de arc în coordonate cilindrice se exprimă sub forma* $ds = [1 + (dr/dz)^2 + r^2(d\theta/dz)^2]^{1/2}dz$ *.Ne vom referi la traiectorii elicoidale cu bază circulară de rază constantă, astfel că* $dr/dz = 0$. *Lagrangeanul optic (50) are forma* $L = n(r)[1 + r^2(d\theta/dz)^2]^{1/2}$ *şi ecuația Lagrange* $(d/dz)(\partial L/\partial r') = \partial L/\partial r$ *ne conduce la* $dn/dr = -nr\theta'^2/(1 + r^2\theta'^2)$. *Când distribuția indicelui de refracție determină traiectorii elicoidale cu aceeaşi perioadă, trebuie ca mărimea* $d\theta/dz$ *să fie independentă de r. Dacă perioada este D, putem scrie* $\theta' = d\theta/dz = 2\pi/D$, *cu **D constant, independent de r** .Prin integrarea ecuației diferențiale de mai sus obținem* $\ln n = \int\frac{dn}{n} = -\theta'^2\int\frac{rdr}{1 + \theta'^2r^2} = -\frac{1}{2}\ln(1 + r^2\theta'^2) + K$. *Dacă* $n_0$ *este indicele de refracție pe axă (* $r = 0$ *), rezultă* $K = \ln n_0$ *şi, în final, putem scrie* $n(r) = n_0\left[1 + (2\pi/D)^2r^2\right]^{-1/2}$.

**8.** Să se determine traiectoria x(z) a razei de lumină ce se propagă în mediul neomogen al cărui indice de refracție variază după legea $n(x) = n_0 \operatorname{sech}(\alpha x)$, $\alpha$ fiind o constantă pozitivă. Să se arate că perioada oscilației spațiale (în lungul axei Oz) a razei de lumină este independentă de condițiile inițiale.

***Răspuns:*** *Se utilizează rezultatul problemei* 6 *şi se găseşte dependența:* $x(z) = \frac{1}{\alpha}\operatorname{arsh}[(A^2-1)^{1/2}\sin(\alpha(z+C))]$, *unde* $A = \frac{n_0}{n(x_0)\cos\gamma_0}$ *iar* C *este o constantă de integrare.*

**9.** Un semicilindru este confecționat dintr-o succesiune de straturi semicilindrice extrem de subțiri, optic-transparente, cu diferite valori constante ale indicelui de refracție. Indicele de refracție scade de la centru spre periferie. Vi se furnizează dependența de rază a indicelui de refracție sub formă grafică: $Y = \ln n$ este reprezentat în funcție de $X = \ln r$, ca o curbă descrescătoare ce tinde spre zero când X tinde spre $\ln R$ (R este raza semicilindrului). Utilizând acest grafic să se determine valoarea $r_{eficace}$ a razei traiectoriei semicirculare pe care o parcurge în semicilindru acea rază de lumină care intră şi iese în/din semicilindru perpendicular pe fața plană.

***Răspuns:****Timpul traiectului semicircular interior este egal cu o jumătate de perioadă adică,* $T/2 = \pi r / v = (\pi/c)(n.r)$. *El poate rămâne constant (staționar) numai dacă* $r \cdot n(r) = \text{constant}$, *adică dacă* $\ln r + \ln n(r) = \text{constant}$, *ceea ce înseamnă* $Y = -X + \text{constant}$. *Aşadar, pentru determinarea lui* $r_{eficace}$ *trebuie localizat pe graficul furnizat punctul în care tangenta la curbă este paralelă cu a doua bisectoare.*

**10.** Indicele de refracție al aerului atmosferic staționar, la temperatura T = 300 K şi la presiunea de o atmosferă, are valoarea n=1,0003 (pentru mijlocul spectrului vizibil). Presupunând că atmosfera este izotermă să se calculeze de câte ori ar trebui să crească densitatea aerului atmosferic ($\rho$) pentru ca traiectoria unei raze de lumină să aibă formă circulară, pe suprafața Pământului, la nivelul mării (nivelul zero). Veți admite că indicele de refracție n are următoarea proprietate: diferența n-1 este direct proporțională cu densitatea $\rho$ a aerului. Grosimea atmosferei se va considera egală cu 8700e metri (e fiind baza logaritmilor naturali).

***Indicație şi răspuns:*** *Se va utiliza principiul lui Fermat şi legea barometrică. Rezultatul este* $\rho/\rho_0 = 4{,}53$.

**11.** Pe un mediu optic neomogen, stratificat, în care indicele de refracție n variază numai în lungul axei Oy, cade o rază de lumină sub incidență normală, venind din vid pe direcția Ox. Ştiind că ecuația traiectoriei luminoase în mediu este parabola $y=Ax^2$, cu A>0 (o constantă), să se determine dependența n(y) a indicelui de refracție.

***Răspuns***: $n(y) = [1+4Ay]^{1/2}$.

**12.** În deşert, la înălțimi z nu prea mari de la suprafața nisipului încins, indicele de refracție al aerului variază după legea $n(z) = n_0/(1-\alpha z)$, cu $\alpha > 0$. De la ce distanță se poate observa mirajul unui palmier de înălțime H ?

***Răspuns:*** $x \approx H(1-\alpha H)/\sqrt{\alpha H(2-\alpha H)}$.

**13.** Pe o lamă transparentă, neomogenă, plan-paralelă, al cărei indice de refracţie variază după legea $n(x) = n_A/(1 - x/R)$, cade, în punctul A, de coordonată x=0 (observaţi că $n(0)=n_A$), perpendicular pe placă, un fascicul paralel de lumină, foarte îngust (rază de lumină). Fasciculul părăseşte lama în punctul B de pe cealaltă faţă (opusă celei pe care s-a produs incidenţa), sub unghiul β faţă de direcţia iniţială (β este o deviaţie unghiulară). Lama se află în aer. Să se determine: a). Indicele de refracţie al lamei în punctul B (notat cu $n_B$); b).Coordonata $x_B$ a punctului B ; c). Grosimea g a lamei ; d). Aplicaţie numerică: $n_A$=1,20, R= 13 cm, β=30$^0$, $n_{aer}$= 1.

***Răspunsuri:*** *a).* $n_B = \sqrt{n_A^2 + \sin^2\beta} = 1{,}30$; *b).* $x_B = R(1 - \sin i_B) = 1\text{cm}$, *unde* $i_B = \arcsin(n_A/n_B) = 67{,}38^0$*; c).* $g = R\cos i_B = 5\text{cm}$.

**14.** Se poate demonstra că ecuaţia diferenţială a traiectoriei mişcării unui electron într-un microscop electronic se poate scrie sub forma (13),din Capitolul I, unde indicele de refracţie echivalent are o dependenţă de coordonata transversală x de forma $n = n_1\left(1 - x^2/a^2\right)$, a fiind o dimensiune transversală caracteristică. Axa optică este dirijată de-a lungul lui Oz iar $n_1$, putând depinde de z, este indicele de refracţie de pe axă (x=0).

1) Arătaţi că în aproximaţia gaussiană, ecuaţia traiectoriei se poate scrie sub forma $\frac{d}{dz}\left(n\frac{dx}{dz}\right) = -2Mx$. Precizaţi dependenţa lui M de a şi de $n_1$.
2) Soluţia generală a ecuaţiei de la punctul 1) se poate scrie sub forma, $x(z) = x_e g(z) + n_e x'_e h(z)$, unde $x_e$, $n_e$ şi $x'_e = (dx/dz)_e$ sunt mărimi referitoare la punctul (planul) de abscisă $z_e$ şi unde $g(z)$ şi $h(z)$ sunt două soluţii particulare ale ecuaţiei diferenţiale de la punctul 1). Determinaţi valorile mărimilor $g_e$, $n_e g'_e$, $h_e$, $n_e h'_e$. Stabiliţi forma matricei de transfer între planele $P_e$ de la cota $z_e$ şi $P$ de la cota $z$. Arătaţi că determinantul matricei de transfer este independent de z şi calculaţi valoarea sa.
3) Ce devin funcţiile $g(z)$ şi $h(z)$ într-un mediu omogen cu indicele de refracţie n ? Ce formă are matricea de transfer între planele $P_e$ şi $P$ în acest caz ?

***Răspunsuri:*** *1).* $M = n_1/a^2$*; 2).* $g_e = n_e h'_e = 1$, $h_e = g'_e = 0$, *astfel că matricea de transfer are forma* $T = \begin{bmatrix} g & h \\ ng' & nh' \end{bmatrix}$. *Deoarece* $\det T = n(gh' - hg')$ *găsim că* $\frac{d}{dz}(\det T) = g\frac{d(nh')}{dz} - h\frac{d(ng')}{dz} = 0$, *adică* $\det T = \text{const}$. *Calculând constanta cu valorile de la cota* $z_e$ *găsim că* $\det T = 1$.

*3).Deoarece* $n = \text{constant}$, *rezultă* $M = 0$ *şi soluţia ecuaţiei este* $x = az + b$ *(traiect rectiliniu). Comparând cu soluţia generală de la punctul 2) găsim că* $g(z) = 1$ *şi* $h(z) = (z - z_e)/n$. *În cele din urmă se obţine bine-cunoscuta matrice de translaţie* $T = \begin{bmatrix} 1 & (z - z_e)/n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

**15.** În vecinătatea solului fierbinte indicele de refracție al aerului variază cu înălțimea y după legea $n(y) = n_0\sqrt{1+2y/a}$ , unde a este o constantă cu dimensiunea de lungime. Un observator O, plasat în originea reperului cartezian Oxyz, recepționează raze luminoase care pornesc, parcă, dintr-un punct A situat sub planul orizontal Oxz.
a). Precizați forma suprafețelor izo-indici (de refracție) şi orientarea vectorului grad n. Exprimați legea Snell-Descartes în funcție de unghiul de incidență i dintre axa verticală Oy şi versorul tangent $\vec{\tau}$ orientat în sensul propagării luminii; b). Ştiind că în originea O avem $i = i_0$ să se arate că traiectoria razei de lumină ce ajunge la observator are forma parabolei $y = x^2/(2a\sin^2 i_0) - x/(\mathrm{tg} i_0)$; c). Cât este abscisa $x_F$ a punctului F în care raza de lumină intersectează planul orizontal ? d). Arătați că există două valori diferite ale unghiului $i_o$ pentru o rază de lumină ce trece prin O şi prin punctul $A(x, y)$; e). Păstrăm x constant şi facem să varieze ordonata y a punctului A . Arătați că atunci când una din valorile unghiului $i_o$ creşte, cealaltă valoare scade, ceea ce înseamnă existența a două imagini ale obiectului, una dreaptă, cealaltă răsturnată.

***Răspunsuri***: *a). Suprafețele izo-indici (de refracție) sunt plane orizontale astfel că vectorul* grad n *este vertical. Din proiecția pe axa Ox a ecuației (13) a razei de lumină rezultă* $n\,dx/ds = \text{Const}$ *şi* $n \sin i = \text{Const}$. *b). Proiecția aceleiaşi ecuații pe axa Oy ne conduce la relația* $d^2y/dx^2 = n_o^2/aC^2 \equiv A = (a\sin^2 i_0)^{-1}$. *Prin integrare rezultă* $y = (A/2)x^2 + Bx$ *(căci pentru observator* $x = 0$, $y = 0$ *). Deducem că* $B = -1/\mathrm{tg} i_0$. *c).* $x_F = a\sin(2i_0)$. *d). Pentru necunoscuta* $g = 1/\mathrm{tg} i_0$ *avem ecuația* $g^2 - \frac{2a}{x}g - \frac{2ay}{x^2} + 1 = 0$ *cu soluțiile* $g = \frac{a}{x} \pm \sqrt{\frac{a^2}{x^2} + \frac{2ay}{x^2} - 1}$ *.e). Prin derivarea acestor soluții obținem imediat că* $\frac{dg}{dy} = \frac{a/x^2}{g - a/x}$ *şi, când* $g > a/x$, *g şi y variază în acelaşi sens. Din contră, când* $g < a/x$ , *g şi y variază în sensuri opuse.*

**16.** Ce formă are traiectoria razelor luminoase ce se propagă într-un mediu neomogen, stratificat după legea $n(y) = n_0/\sqrt{y_0 - y}$ ?

***Răspuns:*** *Traiectoria este o cicloidă de forma* $x(t) = \pm r(t - \sin t) + C_1$, $y = y_0 - r(1-\cos t)$, *unde* $r = n_0^2/2C_2^2$ *.Constantele de integrare se pot determina din condițiile "inițiale".*

**17.** Ce formă are traiectoria razelor luminoase ce se propagă într-un mediu neomogen stratificat după legea $n(y) = n_o y$ ?

***Răspuns:*** *Traiectoria are forma* $y = (1/2k)[e^{k(x+C)} + e^{-k(x+C)}]$, *unde k şi C sunt constante de integrare. În cazul particular cu C= 0,curba se numeşte catenaria şi are ecuația* $y = (1/k)\cosh(kx)$.

**18.** Considerând că indicele de refracție al aerului atmosferei terestre depinde numai de distanța până la centrul Pământului [n=n(r)] şi pornind de la formula (16) a curburii traiectului luminos, să se deducă formula pentru calculul „refracției astronomice” . Se va ține cont şi de curbura suprafeței Pământului (sferă de rază $R_0$).

***Indicații şi răspuns:*** *Să urmărim figura B.1. Unghiurile sunt măsurate față de direcția zenitală (verticala locului unde se află observatorul astronomic). Fie* $\theta$ *unghiul dintre tangenta la raza de lumină într-un punct oarecare (P) din atmosferă şi direcția zenitală (Z) , respectiv γ-unghiul dintre normala locală la traiectorie şi direcția spre centul Pământului (O) .Unghiul format de direcția PO, spre centrul Pământului, şi direcția zenitală OZ este* $\phi = \theta + \gamma - 90^0$. *Se pot stabili, fără prea mari dificultăți, următoarele relații:* $d\theta/dr = -tg(\theta - \phi)\, d(\ln n)/dr$, *respectiv formula lui Bouguer* $r n(r) \sin(\theta - \phi) = n_0 R_0 \sin\theta_0$. *Se notează cu* $\theta_0$ *unghiul format de direcția zenitală OZ cu tangenta la raza de lumină ce intră in luneta (telescopul) observatorului şi cu* $\theta_\infty$ *unghiul format cu asimptota la raza de lumină. Eliminând între cele două relații diferența* $\theta - \phi$ *şi separând apoi variabilele, prin integrare obținem formula*

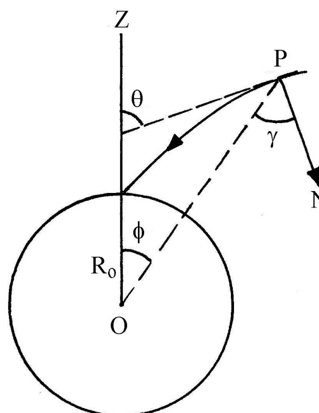



Figura B.1

$$\theta_\infty - \theta_0 = -n_0 R_0 \sin\theta_0 \int_{R_0}^{\infty} \frac{d\ln n(r)}{dr} \frac{dr}{\sqrt{r^2 n^2(r) - n_0^2 R_0^2 \sin^2\theta_0}} .$$

*În practică se măsoară unghiul* $\theta_0$ *şi din cunoaşterea dependenței* $n(r)=1+A\rho(r)$ *[densitatea* $\rho(r)$ *a aerului se poate estima, de exemplu, cu formula barometrică] se determină unghiul* $\theta_\infty$.

**19.** Traiectoria unei raze de lumină într-un mediu neomogen are formă sinusoidală şi este reprezentată prin relația $x = A\sin(y/B)$. Determinați indicele de refracție (n) al mediului între planele $x = +A$ şi $x = -A$, presupunând că el depinde numai de coordonata x şi că are valoarea $n_o$ la x=0.

***Răspuns:*** $n^2 = \dfrac{n_0^2 B^2}{A^2 + B^2}\left[1 + \dfrac{A^2}{B^2}\right]\cos^2\left(\dfrac{x}{B}\right)$.

**20.** Într-un mediu stratificat, indicele de refracție variază cu înălțimea y, măsurată pe verticală, după legea $n = y_o / y$, unde $y_o$ este o anumită lungime caracteristică , mai mare decât grosimea întregului mediu stratificat (astfel că n rămâne mereu supraunitar). Ce formă are traiectoria unei raze de lumină în acest mediu ?

***Răspuns:*** *Traiectoria este un cerc de forma* $(x + A)^2 + y^2 = B$. *Constantele de integrare* A *şi* B *se pot determina din cunoaşterea coordonatelor „punctului de start” şi a versorului local tangent.*

**21.** Indicele de refracție al sticlei optice poate fi modificat prin difuzarea de impurități în interiorul său. În acest fel este posibilă construirea unor lentile de grosime constantă (discuri cilindrice, sub formă de lame cu fețe plan-paralele) , cu indicele de refracție variabil de la axul optic principal -perpendicular pe lentile- spre exterior. Dacă grosimea discului este d, cum trebuie să arate dependența $n = n(r)$ pentru a obține o lentilă convergentă cu distanța focală egală cu $f$ ?

***Răspuns:*** $n(r) = n_o + (1/d)[f - (f^2 + r^2)^{1/2}]$. *Pentru valori mici ale lui* $r$ *(în comparație cu* $f$ *) putem scrie* $n(r) \approx n_o - r^2/2fd$ .

**22.** Folosind proprietățile geometrice ale elipsei să se demonstreze riguros că focarele sale sunt puncte perfect conjugate optic (vezi Figura 16, cazurile e) şi f)).

**23.** Folosind proprietățile geometrice ale hiperbolei să se argumenteze mersul razelor de lumină din Figura 16, cazurile b) şi d), în care punctele $P_1$ şi $P_2$ sunt focarele hiperbolei.

**24.** Folosind proprietățile geometrice ale parabolei să se explice funcționarea oglinzilor reprezentate în Figura 16, cazurile g) şi h).

**25.** Se consideră o oglindă sferică concavă, cu centrul de curbură C şi vârful V (figura B.2). Se ridică în C o perpendiculară pe axul optic principal CV şi, pe această dreaptă, se consideră punctele A şi B simetrice, de o parte şi de alta a axului optic principal, astfel că AC=BC. Raza de lumină care pleacă din A şi ajunge în B după o reflexie pe această oglindă are traiectul AVB format din porțiunile rectilinii AV (raza incidentă) şi VB (raza reflectată). Fie Q un alt punct de pe oglindă, în vecinătatea punctului V. Arătați că, dacă traiectul luminos AQB (traiect variat) ar fi real, drumul optic total pe acest traiect ar fi mai scurt decât cel real (AVB). Aşadar, în acest caz, drumul optic real este maxim în raport cu cele variate.

***Rezolvare:*** *În figura B.2 s-a construit şi arcul de elipsă EVR, având focarele A şi B, tangent în V la oglinda sferică. Se ştie că oricare ar fi punctul R de pe elipsă putem scrie AR+RB=AV+VB=2a. Dacă reflexia luminii ar avea loc în punctul Q de pe oglinda sferică, drumul optic total (AQB) s-ar putea scrie sub forma AQ+QB<AQ+(QR+RB)=AR+RB=2a, adică (AQB)<(AVB).*

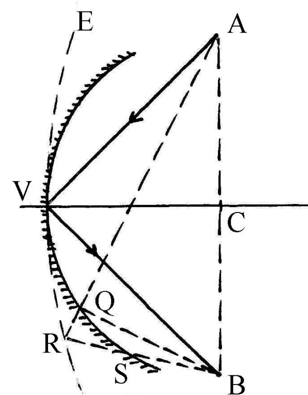


Figura B.2

**26.** În figura B.3 este reprezentată o oglindă sferică convexă, cu vârful în V, având centrul de curbură C. Punctele A şi B sunt simetrice față de axul optic principal CVH, astfel că se poate scrie AH=HB. Dacă A este o sursă luminoasă punctiformă, traiectul AVB, care satisface legea reflexiei (în V), este unul real, AV fiind rază incidentă iar VB-rază reflectată. Arătați că dacă traiectul luminos variat AQB ar fi real, drumul optic (AQB) ar fi mai mare decât drumul optic real (AVB). Aşadar, în acest caz, drumul optic real este minim față de cele variate.

***Rezolvare:*** *Se construieşte elipsa cu focarele A şi B, tangentă în V la oglinda sferică, pentru care putem scrie AV+VB=AR+RB=2a, oricare ar fi punctul R de pe elipsă. Drumul optic (AQB) se poate scrie sub forma AQ+QB=(AR+RQ)+QB >AR+RB =2a=(AVB). Prin urmare drumul optic real (AVB) este inferior oricărui alt drum de tipul (AQB).*

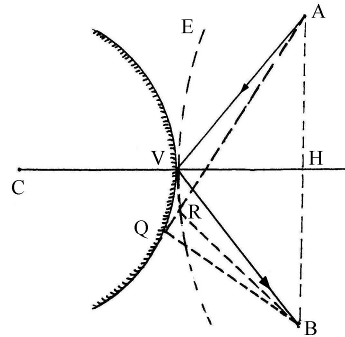


Figura B.3

**27.** Să se arate că, pentru o prismă optică cu unghiul refringent A şi indicele de refracţie n supraunitar, plasată în aer, deviaţia Δ (dintre prelungirea razei incidente şi raza emergentă) satisface relaţia $\sin\left(\frac{A+\Delta}{2}\right)\cos\left(\frac{i-i'}{2}\right)=n\sin\left(\frac{A}{2}\right)\cos\left(\frac{r-r'}{2}\right)$, notaţiile fiind cele uzuale ($i$ şi $i'$ - unghiuri exterioare, $r$ şi $r'$ - unghiuri interioare). Să se particularizeze relaţia la cazul deviaţiei minime şi să se comenteze importanţa practică a rezultatului obţinut.

***Indicaţie***: *Se egalează expresiile lui n explicitate din relaţiile* $\sin i = n\sin r$, $n\sin r' = \sin i'$ *şi se utilizează proprietăţile proporţiilor. Se au în vedere relaţiile* $\Delta = i + i' - (r + r')$, $A = r + r'$. *Prin anularea derivatei* $d\Delta/di$ *rezultă că, la deviaţie minimă,* $i = i'$ *şi* $r = r' = A/2$, *astfel că, în acest caz,* $n = \left[\sin\left(\frac{A+\Delta_{min}}{2}\right)\right]\left[\sin(\frac{A}{2})\right]^{-1}$. *Măsurând experimental unghiurile* $A$ *şi* $\Delta_{min}$ *se poate determina indicele de refracţie* (n) *al materialului din care este confecţionată prisma.*

**28.** Sa se determine unghiul de deviaţie minimă $\Delta_m$ pentru o prismă având indicele de refracţie n >1 şi unghiul refringent (de vârf) A foarte mic (prismă subţire), ţinând seama şi de termenii mici, de ordinul trei în raport cu A. Prisma se află în aer ($n_{aer}$= 1).

***Răspuns:*** $\Delta_m = (n-1)A\left[1+\frac{n(n+1)}{24}A^2+...\right]$.

**29.** O rază de lumină ce se propagă într-un plan perpendicular pe muchia refringentă, de vârf, se refractă (pătrunde) într-o prismă. Să se arate că dacă indicele de refracţie relativ al prismei (n) este supraunitar iar unghiul de incidenţă rămâne constant (la valoarea i), atunci unghiul de deviaţie (Δ) creşte odată cu creşterea unghiului refringent (A) al prismei. Să se determine unghiul refringent maxim la care raza de lumină mai poate ieşi din prismă.

***Răspuns:*** $A_{max} = \arcsin\left(\frac{1}{n}\sin i\right)+\arcsin\left(\frac{1}{n}\right)$.

**30.** Într-un vas lung, cu pereţi plan-paraleli, umplut cu un lichid transparent, se aşează o prismă de sticlă în aşa fel încât baza ei se află pe fundul vasului iar muchia refringentă este paralela cu pereţii plan-paraleli. Curbele dependenţelor $n = n(\lambda)$ pentru lichid şi pentru sticlă, în domeniul vizibil, sunt descrescătoare şi se intersectează pentru valoarea $\lambda_0$ a lungimii de

undă. Pentru $\lambda < \lambda_0$ este mai refringent lichidul iar pentru $\lambda > \lambda_0$ este mai refringent materialul prismei. Ce se va întâmpla cu o rază de lumină albă care pătrunde în vas şi cade pe prismă pe o direcţie paralelă cu baza ?

***Răspuns****:Radiaţia cu lungimea de undă $\lambda_0$ trece mai departe nedeviată. Radiaţiile cu lungimi de undă mai mari (mici) decât $\lambda_0$ vor fi deviate în jos (sus). Dacă punctul de intersecţie al curbelor corespunde luminii verzi, în partea inferioară vor fi deviate culorile galben, orange şi roşu iar în partea superioară vor fi deviate culorile albastru, indigo şi violet. Spectrul observat va avea următoarea ordine a culorilor: VIAVGOR*

**31.** Să se determine dispersia unghiulară a unei prisme optice, definită prin relaţia $D \equiv d\Delta/d\lambda = (d\Delta/dn)(dn/d\lambda)$, în vecinătatea deviaţiei minime. Comentaţi rezultatul obţinut.

***Răspuns***: $D = (dn/d\lambda)[2\sin(A/2)][1-n^2\sin^2(A/2)]^{-1/2}$. *Dispersia unghiulară creşte atunci când unghiul refringent* $(A)$ *creşte. De asemenea, ea este cu atât mai mare cu cât indicele de refracţie (n) al prismei este mai mare şi cu cât materialul său este mai dispersiv în domeniul spectral de interes (dn/dλ este mai mare).*

**32.** Să se scrie formulele prismei optice (unghi refringent A, indice de refracţie n>1) când raza de lumină vine spre punctul de incidenţă de deasupra normalei în acel punct ( nu dinspre baza prismei !)

***Răspuns:*** $\Delta = i - i' + A$, $A = r' - r$, $\sin i = n \sin r$, $\sin i' = n \sin r'$.

**33.** O prismă isoscelă rectangulară, confecţionată din sticlă cu indicele de refracţie $n$, are baza BC şi cateta AC transparente iar cateta AB este opacă (mată). Prisma se aşează cu baza BC pe un ziar. Ce fracţiune din text (ca suprafaţă) poate fi văzută de un observator care priveşte prin cateta transparentă AC ? Discutaţi valorile posibile ale fracţiunii observate în funcţie de indicele de refracţie. Aplicaţie numerică $n = 1{,}5$.

***Răspuns****: Pentru* $n < \sqrt{2}$ *se vede tot textul de ziar. Pentru* $n > \sqrt{2}$ *fracţiunea de suprafaţă văzută este* $f = (1/2)\left(1 + 1/\sqrt{n^2 - 1}\right)$. *Mai este însă necesar ca indicele de refracţie al materialului din care este confecţionată prisma să nu depăşească valoarea* $1/\sin(\pi/8) = 2{,}61$. *În aplicaţia numerică* $f = 3/4$ *, adică 75 de procente. Valoarea minim posibilă a lui* $f$ *este* $1/\sqrt{2} \approx 0{,}7071$ *(şi corespunde valorii maxim posibile a lui n).*

**34.** Dispunem de o prismă optică cu unghiuri de $30^o, 60^o, 90^o$, confecţionată dintr-un material transparent, neabsorbant, având indicele de refracţie $n = 2{,}1$. Un fascicul luminos foarte subţire cade normal, în planul secţiunii principale, pe ipotenuza prismei. Ştiind că la interfaţa aer/sticlă, la incidenţă normală, transmitanţa de intensitate este $T = 4n/(n+1)^2$ :

a). Să se determine fracţiunea de energie luminoasă care iese din prismă, precizându-se în acelaşi timp, pe unde poate avea loc emergenţa energiei luminoase. Discuţie;

b). Să se calculeze lungimea drumului optic al razelor de lumină în interiorul prismei pentru diferitele traiecte posibile.

***Rezolvare**: a). Lumina poate ieşi din prismă fie prin cateta mică, opusă unghiului de* $30^o$*, fie prin ipotenuză (două situaţii distincte, relative la poziţia punctului de incidenţă), după câte două reflexii totale succesive (unghiul critic fiind de* $28{,}44^o$*). .Trecerea lui n în 1/n (interfaţa sticlă/aer) nu modifică transmitanţa astfel că reflectanţa energetică este, în ambele situaţii,* $R = 1 - T = [(n-1)/(n+1)]^2$.
*Ţinând cont de totalitatea drumurilor interne dus-întors cu reflexii şi transmisii parţiale, pe ipotenuză sau pe cateta mică, avem:*
►*Fracţiunea de energie luminoasă ce s-a întors în aer prin ipotenuză*
$F_i = R + RT^2 + R^3T^2 + ... = 2R/(1+R) = (n-1)^2/(n^2+1) = 0{,}224$*;*
► *Fracţiunea de energie luminoasă ce trece în aer prin cateta mică*
$F_c = T^2 + R^2T^2 + R^4T^2 + ... = (1-R)/(1+R) = 2n/(n^2+1) = 0{,}776$. *Se observă că* $F_i + F_c = 1$.
*b). Dacă a este lungimea ipotenuzei, în toate cele trei cazuri posibile, drumul optic are aceeaşi valoare, anume* $na\sqrt{3}/2$.

**35.** Pe suprafaţa unei oglinzi plane, aşezată orizontal, este desenat un cerc de rază $r_o$=4 cm. Un con de sticlă (indice de refracţie n) se aşează vertical, cu vârful în jos, plasat chiar în centrul cercului. Ce rază va avea cercul văzut de ochiul unui observator care priveşte de la mare distanţă, de sus în jos, spre baza conului ? Unghiul de vârf al conului (circular, drept) este $2\alpha = 60^0$ iar $n > \sqrt{2}$. Raza bazei conului este mai mare decât jumătate din raza cercului de pe oglindă.

***Răspuns:*** $r_i = 2\text{cm}$.

**36.** Suprafaţa internă a unui tub cilindric circular drept, a cărui înălţime este mult mai mare decât diametrul, este argintată pe jumătate din înălţime, cealaltă jumătate fiind înnegrită. Tubul este aşezat cu partea argintată în jos, pe o masă orizontală, neagră, mată. În mijlocul mesei, pe axa cilindrului, se află un fotoreceptor punctiform care indică o iluminare $E_0$. Cât va fi iluminarea fotoreceptorului dacă tubul se aşează pe masă, în acelaşi loc, cu partea argintată în sus ? Se va admite că, în ambele cazuri, tubul primeşte lumina de deasupra sa în mod izotrop.

***Răspuns**:* $E = (2/3)E_0$.

**37.** Să se deducă, în aproximaţia paraxială, formulele oglinzilor sferice (concave, convexe), pornind de la principiul lui Fermat.

***Indicaţie:**Se poate consulta referinţa [72], problema 13.2.*

**38.** Un obiect este situat pe axul optic principal al unei oglinzi sferice concave, dincolo de focarul său. Între focar şi oglindă se găseşte o lamă plan-paralelă de sticlă, de grosime d, cu indicele de refracţie n. Axul optic principal al oglinzii este perpendicular pe lamă. Să se demonstreze că introducerea lamei deplasează imaginea în acelaşi mod ca şi o deplasare a oglinzii pe distanţa $(n-1)(d/n)$, înspre obiect.

**39.** Să se deducă, în aproximaţia gaussiană, formulele dioptrului sferic (stabilite de noi în în paragraful 2.1), utilizând principiul lui Fermat. Se vor considera doar puncte obiect şi imagine de pe axul optic principal

***Indicație:****Se poate consulta referința [72], problema 4.2.*

**40.** Să se demonstreze că dacă o rază de lumină traversează mai multe medii omogene, separate între ele prin suprafețe plan-paralele, direcția razei emergente depinde numai de direcția razei incidente şi de indicii de refracție ai primului şi ultimului mediu.

**41.** Într-un telescop este folosită o oglindă concavă, sferică , cu raza de curbură R=2m. În focarul principal (paraxial) al oglinzii este plasat un receptor de radiații sub forma unui disc. Planul discului este perpendicular pe axul optic al telescopului, centrul discului fiind chiar pe ax. Receptorul este capabil să capteze întreaga radiație reflectată de oglindă. Ştiind că dimensiunea transversală a oglinzii (diametrul bazei calotei sferice) este 2a=50 cm, să se determine dimensiunea discului receptor. De câte ori ar fi mai mică radiația pe care ar putea să o capteze receptorul dacă dimensiunile sale ar fi de opt ori mai mici ?

***Răspunsuri:*** $r = 1.95\text{mm}$ ***;*** *de patru ori.*

**42.** Practic, distanța focală f a unei lentile convergente poate fi luată egală cu distanța dintre lentilă şi imaginea unui bec foarte îndepărtat. Cât de mare trebuie să fie distanța L dintre bec şi lentilă pentru ca eroarea relativă în determinarea distanței focale să nu depăşească p procente ?

***Răspuns:*** $L > (1+100/p)f$ **.**

**43.** Pentru a determina distanța focală a unei lentile convergente, astronomul şi matematicianul german F.W. Bessel (1784-1846) a imaginat şi a propus următoarea metodă. De o parte a lentilei se aşează un obiect iar de cealaltă parte, un ecran, distanța dintre ele fiind menținută la o valoare constantă $(d)$. Există, în general, două poziții ale lentilei pentru care se pot obține imagini clare pe ecran. Fie $a$ distanța dintre cele două poziții ale lentilei , care poate fi măsurată experimental destul de precis. Continuați raționamentul lui Bessel şi arătați cum se poate determina distanța $(e)$ dintre planele principale ale lentilei precum şi distanța sa focală $(f)$. Lentila se află în aer $(n_{aer} = 1)$.

***Rezolvare:*** *Distanța d se poate scrie sub forma* $d = -z + e + z'$ *căci* $z$ *şi* $z'$ *sunt raportate la planele principale corespunzătoare. Pe de altă parte* $1/z' - 1/z = 1/f$. *Eliminăm mărimea* $z'$ *şi obținem ecuația* $z^2 + z(d-e) + f(d-e) = 0$, *care are două soluții reale şi distincte numai dacă* $d - e > 4f$. *Fie* $z_1$ *şi* $z_2$ *cele două rădăcini reale , corespunzând celor două poziții distincte ale lentilei* $z_{1,2} = \frac{1}{2}(e - d \pm \sqrt{\Delta})$. *Desigur,* $a = |z_2 - z_1| = \sqrt{\Delta} = [(d-e)^2 - 4f(d-e)]^{1/2}$ *şi, de aici, găsim* că $f = -f' = \dfrac{(d-e)^2 - a^2}{4(d-e)}$, *în care* d *şi* a *s-au măsurat uşor.*

*Cum se poate determina însă interstițiul* e *? Se alege o altă configurație obiect-ecran, corespunzând unei alte distanțe* $d_1$, *şi măsurăm distanța* $a_1$ *dintre cele două poziții ale lentilei care dau imagine clară. Vom putea scrie o relație ca cea de mai sus, cu* $d_1$ *şi* $a_1$ *în locul lui* d *şi* a. *Egalând cele două expresii ale lui* f *putem să îl determinăm pe* e *în funcție de* d, a, $d_1$ *şi* $a_1$.

*Observație:La lentilele nu prea groase, distanța* e *este foarte mică și, de aceea, termenii proporționali cu* $(e/d)^2$ *se pot neglija față de cei de ordinul întâi. Se poate utiliza formula aproximativă* $f = \frac{1}{4d}[d^2 - a^2 - (d^2 + a^2)\frac{e}{d} + O(2)]$.

**44**. Pe fundul unui vas se află un punct luminos. O pâlnie conică de sticlă, cu pereți foarte subțiri, având deschiderea unghiulară 2α, este așezată cu gura circulară în jos . Punctul luminos se află pe axul vertical al pâlniei conice, în centrul bazei circulare. Sub pâlnie este aer iar în exteriorul său, un lichid transparent, cu indicele de refracție n. Lichidul umple vasul până la nivelul vârfului conului. Pentru ce relație între α și n , un observator, privind pe suprafața lichidului din vas va putea vedea punctul luminos ? Discuție.

***Răspuns:*** $tg\alpha > \sqrt{n^2 - 1} - 1$. *Dacă* $n > \sqrt{2}$ *punctul luminos este vizibil (privind de sus) indiferent de deschiderea unghiulară 2α a pâlniei.*

**45.** Într-un bloc de sticlă cu indicele de refracție $n_s$=3/2 se află o cavitate sferică cu raza $R = 36mm$ , umplută cu apă ($n_a$=4/3). Pe cavitate cade un fascicul luminos paralel cu lățimea 2R. Aflați lățimea 2r a fasciculului care pătrunde în cavitate.

***Răspuns:*** $2r = 2R(n_a/n_s) = 64mm$.

**46.** O sursă punctiformă se află la distanța L de un ecran. Între sursă și ecran se interpune o lentilă convergentă, cu deschiderea D, având distanța focală $f > L/4$. Pentru ce poziție a lentilei față de sursă imaginea de pe ecran va avea diametrul minim ? Discuție.

***Răspuns:****Dacă imaginea clară (punctiformă) s-ar forma pe ecran am avea* $x' = L + x$, *cu* $x < 0$ *și, din relația punctelor conjugate, ar rezulta soluțiile* $x = -L/2 \pm \sqrt{L^2/4 - fL}$ *, care nu sunt reale când* $f > L/4$. *Raționamentul trebuie făcut altfel. Dacă* $f > L$ *,înseamnă că* $|x| < f$ *, adică imaginea va fi virtuală și, deoarece după refracție, razele diverg, pata de pe ecran va fi minimă când lentila este lipită de ecran. Avem* $|x| = L$ *și diametrul petei de pe ecran (d) este egal cu diametrul (deschiderea) D a lentilei. Pentru* $L/4 < f < L$, *imaginea clară (punctiformă) se formează dincolo de ecran. Utilizând asemănarea unor triunghiuri găsim că* $d = -D[L/f + x/f + L/x]$, *care este minimă când ultimii doi termeni sunt egali. Obținem* $x = -\sqrt{fL}$ *și corespunzător* $d_{min} = D(2\sqrt{L/f} - L/f)$.

**47.** Să se caracterizeze din punct de vedere geometric caustica dioptrului plan în cazul în care punctul obiect se află în mediul mai refringent.

***Rezolvare:****Să urmărim cu atenție figura B.4. Fie P punctul obiect (sursa luminoasă), situat(ă) în mediul mai refringent, cu indicele de refracție* $n_2 (> n_1)$. *Raza luminoasă PI se refractă în I cu îndepărtare de normală, pe direcția IR, astfel că putem scrie* $n_2 \sin i = n_1 \sin r$. *Raza PN nu se frânge prin refracție, propagându-se pe direcția NK'. Prelungirile celor două raze refractate se întâlnesc în A, punct care este o imagine sagitală (virtuală) a lui P. Distanța NA nu poate depăși o anumită valoare. Într-adevăr, când punctul I este foarte aproape de punctul N, putem scrie aproximativ* $n_2 i \approx n_1 r$ *și* $NI \approx r(NA) \approx i(NP)$,

*astfel că* $NA \approx NP(i/r) = NP(n_1/n_2) < NP$. *Aşadar, punctul A este cuprins întotdeauna între N şi P, segmentul NA având lungimea maximă stabilită mai sus, adică* $NA_1 = NP(n_1/n_2)$.

*Să vedem acum ce formă are cealaltă pânză a causticii. Pentru aceasta construim simetricul lui P faţă de (Δ), adică punctul P', şi construim cercul (cu centrul în O) care trece prin punctele P,I şi P'. Notăm cu M punctul de intersecţie dintre cerc şi prelungirea razei refractate IR. Unim M cu P şi P' şi observăm că unghiurile PMI şi P'MI sunt egale cu i (au ca măsură arce egale). Cu alte cuvinte, dreapta MIR este bisectoarea unghiului PMP' .Mai departe, aplicând teorema sinusurilor în triunghiurile AMP şi AMP' putem scrie*

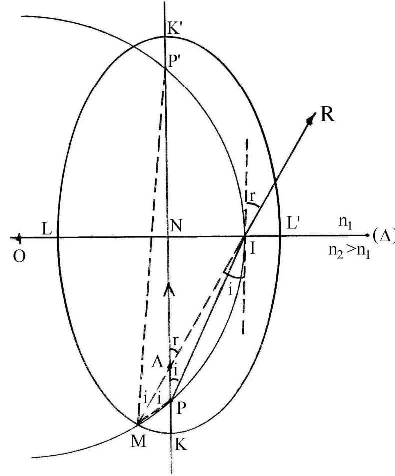


Figura B.4

$(AP)\sin r = (MP)\sin i$, *respectiv* $(AP')\sin r = (MP')\sin i$. *Din aceste relaţii, folosind şi proprietăţile proporţiilor, rezultă* $\frac{\sin i}{\sin r} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{AP}{MP} = \frac{AP'}{MP'} = \frac{AP + AP'}{MP + MP'}$, *ceea ce ne dă*

$MP + MP' = (AP + AP')\frac{n_2}{n_1} = (PP')\frac{n_2}{n_1} > (PP') \equiv 2f$, *adică o valoare constantă (pentru un P fixat). Această proprietate, împreună cu cea evidenţiată mai sus (MIR ca bisectoare) ne demonstrează că locul geometric al punctului M este elipsa cu focarele P şi P'. De aici putem trage următoarea concluzie:a doua pânză a causticii dioptrului plan este înfăşurătoarea normalelor duse la elipsa cu focarele P şi P', având semiaxa mare determinată de relaţia* $a = (1/2)(PP')(n_2/n_1)$. *Desigur, vom plimba punctul M doar în jumătatea inferioara LKL' a elipsei. Se observă că LL'=2b, adică este dublul semiaxei mici a elipsei, unde* $b = \sqrt{a^2 - f^2} = f\sqrt{\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2 - 1}$. *Unghiul de incidenţă corespunzător razei PL' este dat de relaţia* $\mathrm{tg}\, i_L = b/f$, *care ne dă* $\cos i_L = n_1/n_2$. *Pe de altă parte, unghiul critic, corespunzător reflexiei totale, este dat de relaţia* $\sin i_c = n_1/n_2$. *Rezultă imediat că* $i_L = 90^0 - i_c$. *Punctul de incidenţă C, corespunzător unghiului critic* $i_c$, *este cuprins între N şi L' numai dacă* $i_c < i_L$, *ceea ce înseamnă* $i_c < 45^0$. *Aceasta se întâmplă pentru* $n_2 > n_1\sqrt{2}$. *Punctul C ar*

*fi dincolo de L' când* $n_2 < n_1\sqrt{2}$. *În sfârşit, mai remarcăm că punctul* $A_1$, *unde se întâlnesc cele două pânze ale causticii, este conjugatul optic al punctului obiect P în cazul în care stigmatismul este realizat.*

**48.** Să se caracterizeze din punct de vedere geometric caustica dioptrului plan în cazul în care punctul obiect se află în mediul mai puţin refringent.

***Rezolvare:*** *Să urmărim cu atenţie figura B.5. Fie P punctul obiect şi raza luminoasă PI care se refractă (cu apropiere de normală) pe direcţia IR a cărei prelungire (împreună cu prelungirea razei PN) determină punctul sagital A. Avem desigur* $n_1 \sin i = n_2 \sin r$ *cu* $r < i$, *căci mediul 2 este mai refringent decât mediul 1.Procedând ca în problema anterioară constatăm că distanţa NA nu poate fi mai mică decât* $NA_1 = (NP)(n_2/n_1) > NP$. *Cu alte cuvinte, punctul A este întotdeauna sub punctul* $A_1$ *(de unde începe imaginea sagitală,virtuală) care, la rândul său, este sub punctul P.*

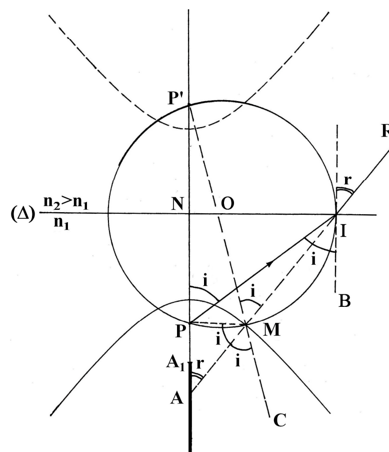


Figura B.5

*Pentru a putea preciza forma celeilalte pânze a causticii construim simetricul* $P'$ *al lui P faţă de (Δ)şi prin P,I şi P' trasăm cercul cu centrul în O. El intersectează prelungirea lui IR în punctul M. Unim M cu P şi P' şi identificăm ca fiind egale cu i (prin măsura lor) următoarele unghiuri:PIB, P'PI, P'MI, PMA, AMC. Cu teorema sinusurilor aplicată succesiv în triunghiurile PMA şi P'MA putem scrie* $(PM)\sin i = (PA)\sin r$, *respectiv,* $(P'M)\sin i = (P'A)\sin r$, *astfel că* $\frac{\sin i}{\sin r} = \frac{n_2}{n_1} = \frac{PA}{PM} = \frac{P'A}{P'M} = \frac{P'A - PA}{P'M - PM} = \frac{P'P}{P'M - PM}$. *De aici rezultă caracterul constant al diferenţei de la numitorul ultimului raport, adică proprietatea* $P'M - PM = (P'P)(n_1/n_2) = \text{const}$ *,când punctul P este fixat. Cu alte cuvinte, locul geometric al punctelor M este hiperbola cu focarele P şi P'. Pe de altă parte, dreapta AMIR este normală în M la hiperbolă (ea fiind bisectoare interioară). Aşadar, a doua pânză a causticii este înfăşurătoarea normalelor duse la ramura de jos a hiperbolei în diversele sale puncte. Rotind desenul în jurul axei PNP' ne putem forma o imagine spaţială completă despre întreaga caustică. Obţinem un fel de „cornet" cu vârful în punctul* $A_1$, *care se extinde (se deschide) în jos până la infinit. Axa cornetului este locul geometric al imaginilor sagitale.*

**49.** O sursă luminoasă punctiformă P este plasată în apă, la adâncimea h faţă de suprafaţa orizontală deasupra căreia se află aer. Cunoscând indicele de refracţie relativ apă-aer, cu valoarea supraunitară n, să se caracterizeze analitic forma suprafeţei caustice pentru fasciculul de raze care iese din apă prin refracţie.

***Rezolvare:*** *Întregul raţionament are în vedere configuraţia din figura B.6, în care PMS şi PNQ sunt traiectele a două raze de lumină extrem de apropiate,*

*Unghiurile de incidență și de refracție sunt α și β, respectiv α+dα și β+dβ. Putem scrie* $n\sin\alpha = \sin\beta$, *respectiv* $n\sin(\alpha + d\alpha) = \sin(\beta + d\beta)$. *Față de sistemul xOy cu axele alese ca în figură dreptele MS și NQ au ecuațiile* $y = m(x - h\,tg\alpha)$, *cu* $m = ctg\beta$, *respectiv* $y = m'(x - h\,tg(\alpha + d\alpha))$, *cu* $m' = ctg(\beta + d\beta)$. *Folosind dezvoltări în serie Taylor (oprite la primii doi termeni) pentru panta m'=ctg(β+dβ) și pentru funcția tg(α+dα),din intersecția celor două drepte obținem coordonatele punctului imagine C de pe a doua pânză a causticii:* $x(\alpha) = h(n^2 - 1)tg^3\alpha$, *respectiv* $y(\alpha) = -\dfrac{h}{n}\dfrac{(1 - n^2\sin^2\alpha)^{3/2}}{\cos^3\alpha}$. *Cele două relații reprezintă ecuația parametrică a causticii.*

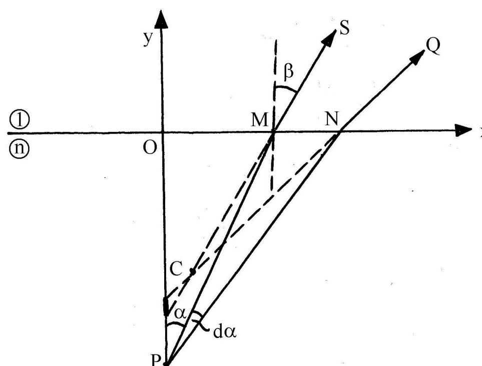



Figura B.6

*Cazuri particulare:a).Pentru* $\alpha = 0$ *obținem* $x = 0$ *și* $y = -h/n$ *cu* $|y| < h$. *Această valoare localizează „vârful"* $A_1$ *al causticii (vezi figura B.4 din problema 47). b). Pentru* $\alpha = \arcsin(1/n)$, *reprezentând unghiul limită (al reflexiei totale) obținem* $x = h/\sqrt{n^2 - 1}$ *și* $y = 0$. *Caustica spațială are forma unui cornet cu deschiderea" în sus".*

**`50.** Repetând raționamentul din problema precedentă dar presupunând că sursa luminoasă P, localizată în punctul de coordonate $x = 0, y = -h$, se află în mediul mai puțin refringent , să se determine coordonatele $x(\alpha)$ și $y(\alpha)$ ale punctului C de pe caustică, în funcție de unghiul de incidență $\alpha$. În zona $y > 0$ se află mediul mai refringent (indice de refracție relativ $n > 1$) iar în zona $y < 0$ se află mediul mai puțin refringent (figura B.7).

***Răspuns:*** $x(\alpha) = -h(1 - 1/n^2)tg^3\alpha$,

$y(\alpha) = -\dfrac{h(n^2 - \sin^2\alpha)^{3/2}}{n^2\cos^3\alpha}$. *Vârful causticii este localizat în punctul de coordonate* $x = 0, y = -nh.$

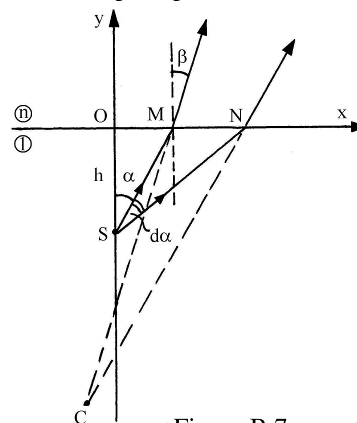



Figura B.7

**51.** O lentilă convergentă având distanța focală +8 cm se află la o distanță de 6 cm în stânga unei lentile divergente, cu distanța focală de -12 cm. La stânga lentilei convergente , la distanța de 24 cm, se află un obiect real, cu înălțimea de 3 cm, plasat perpendicular pe axul

optic principal comun al celor două lentile. Considerând că lentilele sunt subţiri, determinaţi poziţia şi mărimea imaginii finale.

***Răspuns:*** $z_i = 12\text{cm}$, *la dreapta lentilei divergente. Imaginea este egală cu obiectul în mărime, însă este răsturnată.*

**52.** Capătul din partea stângă a unei lungi baghete cilindrice, confecţionată din sticlă organică (n=1,56) are forma unei semisfere convexe cu raza de 2,8 cm. Un obiect cu înălţimea de 2 cm este aşezat perpendicular pe axa optică a baghetei , în partea stângă, la 15 cm de vârful semisferei. Determinaţi poziţia şi mărimea imaginii obiectului.

***Răspuns:*** $z_i = 11{,}7\text{cm}$ *(în interiorul baghetei, la dreapta vârfului). Înălţimea imaginii este de 1 cm.*

**53.** O lentilă semisferică (rază de curbură r, indice de refracţie n) este plasată în aer, cu faţa plană spre stânga, de unde primeşte un fascicul luminos cilindric. Axa cilindrului luminos este perpendiculară pe baza semisferei şi trece prin centrul acesteia. Să se arate că, în aproximaţia gaussiană, al doilea punct principal al sistemului coincide cu vârful semisferei şi că primul punct principal se află în interiorul semisferei, la distanţa r/n de suprafaţa plană. Cât este distanţa focală a acestei lentile *?*

***Răspuns:*** $f = r/(n-1)$.

**54.** O suprafaţă sferică cu raza de curbură R, separă mediul omogen şi izotrop cu indicele de refracţie n (spaţiul obiect) de mediul omogen şi izotrop cu indicele de refracţie $n'$ (spaţiul imagine). Considerând doar raze de lumină paraxiale, să se determine legătura dintre coordonatele carteziene (x,y,z) ale punctelor obiect şi coordonatele carteziene (x',y',z') ale punctelor imagine (optic-conjugate) corespunzătoare. Ca axă Oz se ia axul optic principal ce trece prin vârful dioptrului şi prin centrul de curbură iar ca origine a coordonatelor-vârful dioptrului sferic. Sensul pozitiv al axei Oz este de la stânga spre dreapta.

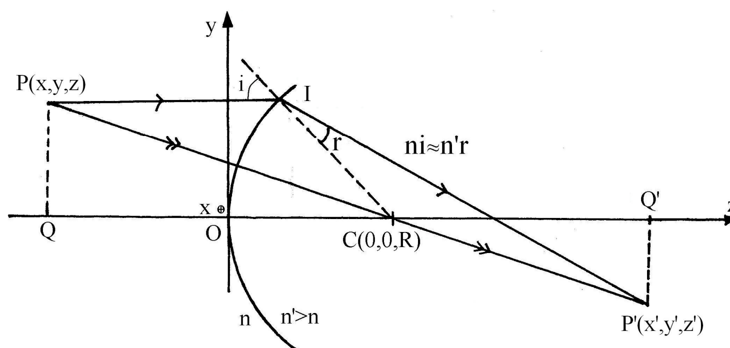



Figura B.8

***Răspuns:*** $x' = \dfrac{nRx}{(n'-n)z+nR}$, $y' = \dfrac{nRy}{(n'-n)z+nR}$, $z' = \dfrac{n'Rz}{(n'-n)z+nR}$.

*Cum se ajunge la aceste expresii ? Punctul obiect şi imaginea sa gaussiană se află pe un ax optic secundar (ce trece prin centrul de curbură); acest ax este puţin înclinat faţă de axul optic principal şi, de aceea, putem scrie cu o bună aproximaţie* $n'/z' - n/z \approx (n'-n)/R$ *. În plus, în planele meridiane (y,z) şi (x,z), pe baza unor asemănări de triunghiuri (vezi figura B.8), triunghiurile PQC şi P'Q'C), se pot scrie relaţii de forma* $y'/y = (z'-R)/(z-R)$ *şi* $x'/x = (z'-R)/(z-R)$.

**55.** Folosind rezultatele problemei precedente să se arate că, pentru un sistem optic centrat, în aproximaţia gaussiană, coordonatele (x,y,z), din spaţiul obiect, se exprimă în funcţie de coordonatele (x',y',z'), din spaţiul imagine, prin relaţiile liniare $x' = \frac{Ax}{cz+d}$, $y' = \frac{By}{cz+d}$, $z' = \frac{Cz+D}{cz+d}$, unde A,B,C,D,c şi d sunt constante caracteristice pentru sistemul optic considerat şi depind numai de alegerea sistemelor de coordonate. În spaţiul obiect, ca origine a sistemului de coordonate se alege un punct arbitrar de pe axul optic principal (z) iar în spaţiul imagine-un alt punct (sau acelaşi punct) de pe axul optic principal (z').

***Rezolvare:****Sistemele optice centrate au simetrie de rotaţie în jurul axei z-z' şi, de aceea, raţionamentele se pot simplifica dacă se lucrează în plane meridiane (x-z, de exemplu).Formulele stabilite în problema precedentă s-au dedus presupunând că originile celor două sisteme de coordonate coincid (cu vârful dioptrului). Prin adecvate translaţii însă, se poate trece la o descriere mai generală, în sisteme de referinţă cu origini diferite. Procedând astfel, relaţiile din răspunsul problemei precedente se vor scrie astfel*

$$x' = \frac{Ax}{cz+d}, \quad z' = \frac{Cz+D}{cz+d}, \qquad (55.1)$$

*şi o relaţie analogă cu prima pentru legătura dintre y' şi coordonatele y,z. Constantele A,C,D,c şi d se pot determina uşor în funcţie de n,n',R şi de originile sistemelor de coordonate. Cu ajutorul acestor formule se stabileşte o corespondenţă între punctele spaţiului obiect (x,y,z) şi punctele spaţiului imagine (x',y',z'), corespondenţă ce se numeşte* ***colineaţie cu simetrie axială*** *(terminologie preluată din geometria proiectivă).*

*Să presupunem acum că, după ce a traversat prima suprafaţă refringentă,razele de lumină suferă o nouă refracţie pe o a doua suprafaţă refringentă. Dacă obiectul P avea o primă imagine P', acum aceasta are o imagine P" plasată în punctul de coordonate (x",y",z"). Coordonatele acestei imagini se leagă de coordonatele (x',y',z') ale punctului P' prin relaţii de forma (55.1),anume*

$$x'' = \frac{A'x'}{c'z'+d'}, \quad z'' = \frac{C'z'+D'}{c'z'+d'}, \qquad (55.2)$$

*cu noile constante A',C',D',c' şi d'. Eliminând coordonatele cu indice prim între relaţiile (55.1) şi (55.2) obţinem formulele de colineaţie*

$$x'' = \frac{A''x}{c''z+d''}, \quad z'' = \frac{C''z+D''}{c''z+d''}, \qquad (55.3)$$

*în care cele cinci constante cu indice secund sunt exprimate în funcţie de cele zece constante anterioare, fără indice şi cu indice prim. Acest rezultat arată că* ***două sau mai multe colineaţii succesive sunt echivalente cu o singură colineaţie.*** *Prin urmare, pentru orice sistem optic centrat, se poate stabili , în aproximaţia gaussiană (raze paraxiale), o colineaţie între punctele spaţiului obiect şi cele ale spaţiului imagine, ce se exprimă prin formulele precizate în enunţ. Colineaţia este caracterizată de patru parametri (luaţi, de exemplu, sub forma relativă A/c,D/c, C/c şi d/c) care pot fi puşi în legătură directă cu cele patru elemente ale matricei de transfer. Precizăm că, din cauza simetriei cilindrice , constantele A şi B din enunţ sunt egale.*

**56.** Să se exprime coordonatele focarelor,punctelor principale şi nodale ale unui sistem optic centrat, precum şi distanţele focale, prin constantele A=B,C,D,c şi d din problema precedentă.

***Rezolvare:*** *Inversând dependenţa din enunţul problemei precedente, putem exprima coordonatele (x,y,z) în funcţie de cele cu indice prim. Avem*

$$x=\frac{A'x'}{c'z'+d'},\ y=\frac{B'y'}{c'z'+d'},\ z=\frac{C'z'+D'}{c'z'+d'}\ , \qquad (56.1)$$

unde $A'=B'=(cD-Cd)/A$ $\left(\text{sau}=(cD-Cd)/B\right)$, $C'=-d$, $D'=D$, $c'=c$, $d'=-C$. *Observăm că transformările inverse se exprimă tot prin formulele de colineaţie, ceea ce exprimă, evident, reversibilitatea traiectului luminos.*

*Formulele de colineaţie permit obţinerea unor importante concluzii fizice referitoare la proprietăţile imaginilor optice formate de sistemele centrate.*

$\alpha$). *Oricărui plan din spaţiul obiect îi corespunde un plan în spaţiul imagine. Într-adevăr, orice plan din spaţiul obiect are o ecuaţie de forma* $A_0x+B_0y+C_0z+D_0=0$. *Înlocuind aici relaţiile (56.1) obţinem în cele din urmă o ecuaţie de forma* $A_ix'+B_iy'+C_iz'+D_i=0$, *care este ecuaţia planului imagine.*

$\beta$). *Oricărei drepte din spaţiul obiect îi corespunde o dreaptă în spaţiul imagine. Afirmaţia este evidentă dacă avem în vedere că dreapta este intersecţia a două plane.*

$\gamma$). *Oricărui punct din spaţiul obiect îi corespunde un punct în spaţiul imagine (stigmatism perfect), deoarece punctul este intersecţia a două drepte.*

*Formulele din enunţul problemei precedente ne arată că unor valori x,y,z finite le corespund ,în general, valori x',y',z' finite. Face excepţie situaţia*

$$cz+d=0\ , \qquad (56.2)$$

*adică punctele unui plan, numit* ***plan focal obiect*** *al sistemului optic centrat. Imaginea oricărui punct din acest plan se formează la infinit. Aceasta înseamnă că toate razele de lumină care pornesc dintr-un punct al planului (56.2) devin paralele după ce traversează sistemul optic. În mod analog, planul*

$$c'z'+d'=0\ , \qquad (56.3)$$

*este denumit* ***plan focal imagine*** *al sistemului optic centrat. Un fascicul de raze paralele, venind de la infinit din spaţiul obiect, se strânge într-un punct al planului (56.3) după ce a traversat sistemul optic.*

*Punctele de intersecţie ale planelor focale cu axul optic principal se numesc* ***puncte focale*** *sau* ***focarele principale*** *ale sistemului optic:se notează cu F focarul principal obiect şi cu F' –focarul principal imagine. Din formulele de mai sus putem scrie*

$$z_F=-\frac{d}{c},\ z'_{F'}=-\frac{d'}{c'}=\frac{C}{c}. \qquad (56.4)$$

*Pot exista sisteme optice fără plane focale. Este cazul sistemelor pentru care c=c'=0, sisteme denumite* ***telescopice*** *sau* ***afocale.*** *De fapt, în acest caz, planele focale sunt „aruncate" la infinit , ceea ce înseamnă că orice fascicul paralel de raze de lumină rămâne fascicul paralel şi după traversarea sistemului optic (lărgimea transversală a fasciculului se poate însă modifica). Un exemplu de*

*sistem afocal este luneta astronomică reglată pentru infinit, când planul focal imagine al obiectivului se confundă cu planul focal obiect al ocularului.*
*În continuare ne vom referi numai la sisteme optice cu distanțe focale finite.*
*Desigur, raportul* $x'/x$ *(sau* $y'/y$ *) este* ***mărirea transversală*** *(* $m_t$ *)* *a sistemului. Se observă că ea nu depinde decât de z (nu depinde de coordonatele transversale). Prin urmare, imaginea unui obiect plan, perpendicular pe axul optic principal, este asemenea obiectului. Dacă mărirea transversală* $m_t$ *este pozitivă (negativă), imaginea este dreaptă (răsturnată).*
*Se numesc* ***plane principale*** *ale unui sistem optic două plane conjugate pentru care* $m_t = +1$*. Din condiția* $x = x'$ *(sau* $y = y'$ *) obținem*

$$cz + d - A = 0\,, \quad c'z' + d' - A' = 0\,, \qquad (56.5)$$

*prima relație definind* ***planul principal obiect*** *iar cea de a doua* ***- planul principal imagine****. Fie H și H' punctele de intersecție ale acestor plane cu axul optic principal (axa z-z'). Ele se numesc* ***puncte principale*** *obiect, respectiv imagine. Localizarea lor este dată de relațiile*

$$z_H = \frac{A-d}{c}, \qquad z'_{H'} = \frac{A'-d'}{c'} = \frac{cD + C(A-d)}{Ac} \ . \qquad (56.6)$$

*Punctele focale (56.4) și punctele principale (56.6) sunt* ***puncte cardinale****. Ele sunt determinate de patru parametri (d/c, C/c, A/c, D/c) ce caracterizează în întregime sistemul optic centrat.*
*Distanțele dintre punctele principale și punctele focale corespunzătoare se numesc* ***distanțe focale principale*** *ale sistemului. Avem*

$$f = z_H - z_F = \frac{A}{c}, \qquad f' = z'_{H'} - z'_{F'} = \frac{A'}{c'} = \frac{cD - Cd}{cA}. \qquad (56.7)$$

*După cum se știe din paragraful 2.3,* ***punctele nodale*** $N$ *și* $N'$ *(de pe axul optic principal) sunt puncte conjugate optic care se bucură de următoarea proprietate: raza de lumină ce trece prin* N *sub un anumit unghi față de axa optică, trece, după traversarea sistemului, prin* N' *, sub același unghi și în același sens. Aceasta înseamnă o mărire unghiulară* $m_u$ *egală cu* $+1$*. Vom putea scrie simultan (în planul meridian x-z) relațiile*

$$x = \gamma(z - z_N) \quad \text{și} \quad x' = \gamma(z' - z'_{N'}) \qquad (56.8)$$

$\gamma$ *fiind același unghi de înclinare pentru ambele raze de lumină. Raportul celor două ecuații ne dă*

$$\frac{x'}{x} = \frac{z' - z'_{N'}}{z - z_N} \ . \qquad (56.9)$$

*Folosind aici relațiile din enunțul problemei anterioare și având în vedere că relația obținută trebuie să fie verificată pentru orice valori ale coordonatei z (se identifică separat coeficienții lui* $z^1$ *și* $z^0$ *) obținem în final*

$$z'_{N'} = \frac{C}{c} - \frac{A}{c} = z'_{F'} - f\ , \qquad (56.10)$$

*respectiv*

$$z_N = -\frac{d}{c} + \frac{Cd - cD}{cA} = z_F - f'\,, \qquad (56.11)$$

*adică proprietatea evidențiată de cele două formule ale relației (187) din Capitolul II.*

**57.** Ce formă au relațiile din problema 55 dacă originile sistemelor de coordonate se aleg:
1). în punctele principale H şi H' ale sistemului optic centrat (în acest caz coordonatele se vor nota cu literele greceşti $\xi$ , $\eta$ , $\zeta$, fără indice sau cu indice prim);
2). în focarele F şi F' ale sistemului optic centrat (în acest caz coordonatele se vor nota cu literele mari X,Y,Z, fără indice sau cu indice prim) ?

***Rezolvare*:** *1). Punând condiția* $z_H = z'_{H'} = 0$ *obținem imediat relațiile cunoscute din Capitolul II, anume*
$f/\zeta + f'/\zeta' = -1$, $m_t = \xi'/\xi = f/(f+\zeta) = (f'+\zeta')/f'$.
*2). Punând condiția* $z_F = z'_{F'} = 0$ *obținem imediat relațiile cunoscute* $ZZ' = ff'$, $m_t = X'/X = Y'/Y = f/Z = Z'/f'$.

**58.** Să se determine poziția planelor principale şi distanțele focale ale unui sistem optic centrat care constă dintr-o singură suprafață sferică refractantă (rază de curbură R), ce separă mediile cu indicii de refracție n şi n' (ca în problema 54).

***Răspuns:****Planele principale coincid. Ele sunt tangente la suprafața sferică refractantă în vârf (locul de intersecție cu axul optic principal). Distanțele focale sunt* $f = nR/(n'-n)$, $f' = -n'R/(n'-n)$.

**59.** Să se afle distanța focală $f$ a unui sistem centrat format din două lentile subțiri, cu distanțele focale $f_1$ şi $f_2$, distanța dintre ele fiind D. Spațiul dintre lentile este umplut cu un lichid transparent având indicele de refracție n.

***Răspuns*:** $f = nf_1f_2/[n(f_1+f_2)-D]$.

**60.** Folosind rezultatele problemelor 54 şi 58 să se afle poziția planelor principale şi distanțele focale ale unui sistem optic centrat format din două suprafețe sferice cu razele de curbură $R_1$ şi $R_2$, care separă trei medii omogene şi izotrope cu indicii de refracție $n_i, i = 1,2,3$.

***Răspuns*:** $f = -(1/D)(n_1n_2)(R_1R_2)$, $f' = +(1/D)(n_2n_3)(R_1R_2)$, *unde* $D = d(n_2-n_1)(n_3-n_2)+n_2[R_1(n_2-n_3)+R_2(n_1-n_2)]$. *Prin* $d$ *s-a notat grosimea lentilei (adică distanța dintre vârfurile* $V_{1,2}$ *ale celor doi dioptri). Punctele principale sunt localizate astfel:* $V_1H = -n_1(n_3-n_2)(R_1d)/D$, $V_2H' = n_3(n_2-n_1)(R_2d/D)$.

**61.** O lentilă convergentă formează imaginea unui obiect liniar, aşezat perpendicular pe axul optic principal , pe un ecran paralel cu obiectul. Înălțimea imaginii este $a$ . Menținând fixe ecranul şi obiectul (ambele perpendiculare pe axul optic principal), se deplasează treptat lentila spre ecran şi se constată că o a doua imagine clară a obiectului are înălțimea $b$ .Cât este înălțimea obiectului ?

***Răspuns*:** $h = \sqrt{ab}$ .

**62.** Presupunând că înainte de a ieşi dintr-o picătură sferică de apă (n=4/3) o rază de lumină suferă k reflexii interne succesive , unghiul total de deviaţie (dintre raza incidentă pe, şi cea emergentă din, picătură) are expresia $\phi = 2(i - r) + k(\pi - 2r)$ - vezi nota de picior de la pagina 137. Folosind legea $\sin i = n \sin r$ a refracţiei şi condiţia deviaţiei extremale $d\phi/di = 0$, să se determine unghiurile caracteristice (carteziene) ale curcubeelor cu ordinele k=1,2,3,4,5,6 (1 şi 2 desemnează, în limbajul teoriei carteziano-newtoniană, curcubeele principal şi secundar ; curcubeele de ordin superior au fost studiate de către E. Halley).

***Răspuns:*** *Vezi nota de picior de la pagina 137,*

**63.** În dimineţile de toamnă, când Soarele nu s-a ridicat prea mult deasupra orizontului (unghi $\gamma$), observând picăturile de apă (roua) de pe pânzele de păianjen aşezate pe iarbă, în plan orizontal, se constată formarea aşa-numitului „curcubeu pe rouă”. Ştiind că razele de lumină ce ajung în ochii observatorului (aflaţi la înălţimea H) au urmat un traseu cartezian cu o singură reflexie internă în picături (indice de refracţie n), să se determine, pe orizontală, distanţa de la picioarele observatorului până la picăturile de rouă pe care se vede curcubeul . Se presupun cunoscute următoarele mărimi: H=1,80 m, $\gamma=15^0$, n=4/3.

***Răspuns:*** $x = H/\mathrm{tg}(\pi - \phi_{min} + \gamma)$, *cu* $\phi_{min} \approx 138^0$. *Cu datele din enunţ obţinem* $x = H/\mathrm{tg}57^0 \approx 1{,}17\,\mathrm{m}$.

**64.** Imaginaţi-vă următorul experiment având menirea de a reproduce (simula) în laborator formarea curcubeului principal. În vârful acului unei seringi medicale (sau pipete) se formează o picătură sferică de glicerină, aranjamentul experimental (vezi figura B.9) fiind astfel realizat încât ea să fie plasată chiar în centrul unui ecran (pâlnie) sferic(ă). Picătura este iluminată de un fascicul laser cu simetrie cilindrică, omogen în planul secţiunii transversale, care pătrunde spre picătură, printr-un mic orificiu practicat în polul semisferei . Privind din exterior, uşor în lateral faţă de direcţia fasciculului laser (măsură de protecţie!), localizăm uşor, pe suprafaţa interioară a semisferei (ecranului), ca o zonă mai intens luminată, curcubeul de ordinul întâi. Se măsoară unghiul ($\alpha$) dintre direcţia spre orificiu şi direcţia spre curcubeu. Presupunând că teoria carteziană a formării curcubeului este corectă, să se determine indicele de refracţie n al glicerinei. Aplicaţie numerică: $\sin\alpha = (10/27)\sqrt{2}$ .

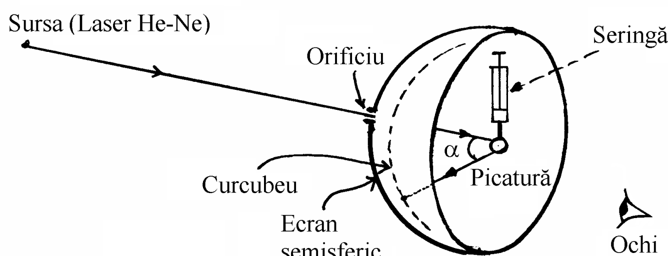



Figura B.9

***Răspuns:*** *Se poate vedea uşor că* $\alpha = \pi - \phi_{cartezian} = 2r_{cartezian} - i_{cartezian}$, *unde unghiurile carteziene (eficace) sunt dependente de indicele de refracţie n al picăturii (vezi nota de picior de la pagina 137). Se obţine în final ecuaţia* $27n^4 - \sin^2(\alpha/2) = (4 - n^2)^3$, *care se poate rezolva cu ajutorul formulelor Cardano-Tartaglia. În aplicaţia numerică se găseşte* $n = \sqrt{2} \approx 1{,}414$.

**65.** Pentru determinarea distanței focale a unei lentile subțiri, Silbermann a propus următoarea metodă: menținând obiectul într-o poziție fixă, se deplasează longitudinal, pe bancul optic, lentila şi ecranul, până când se găseşte acea poziție a lor în care imaginea de pe ecran are aceleaşi dimensiuni ca obiectul. Să se determine distanța focală a lentilei în funcție de distanța dintre obiect şi imaginea sa în situația de mai sus.

***Răspuns:*** $f = D/4$.

**66.** Un fascicul luminos îngust cade normal pe o sferă transparentă, omogenă, de rază R şi indice de refracție $n > 1$, plasată în aer (n'=1).Pe direcția fasciculului incident, înainte de centrul C al sferei, la distanța x=PC, se află un centru difuzant punctiform P (firicel de praf), care împrăştie lumina incidentă în mod izotrop, în toate direcțiile.
a). Să se determine fracțiunea f din fluxul luminos difuzat de P care părăseşte sfera; discuție.
b). Dincolo de centrul C, la distanța CS=R-h, se secționează sfera transparentă cu un plan $(\pi)$, perpendicular pe dreapta PCS, eliminându-se calota de înălțime h. Ce valoare trebuie să aibă parametrul h pentru ca fluxul luminos emergent din sferă să coincidă cu cel de la punctul precedent ?

***Răspuns:*** *a). Dacă* $x < R/n$*, avem* f=1.*Dacă* $x > R/n$ *fracțiunea solicitată în enunț are valoarea* $f = 1 - \sqrt{1-(R/xn)^2}$ .

*b). Calota decupată din sfera transparentă trebuie să aibă înălțimea* $h = (1/n^2)[x + Rn^2 - \sqrt{(n^2-1)(n^2R^2 - x^2)}]$.

**67.** Un semicilindru este confecționat dintr-un material transparent cu indicele de refracție $n = \sqrt{2}$ . Pe fața plană, pe lățimea unui diametru, cad raze de lumină în fascicul paralel, sub un unghi de incidență $i = 45^0$ . Razele de lumină incidente se află într-un plan perpendicular pe axa cilindrului. Pe ce porțiune a suprafeței opuse (semicirculare) ies din cilindru raze de lumină ?

***Răspuns:*** *Unghiul la centru al porțiunii prin care există emergență este de* $90^0$ *.În partea stângă, respectiv în partea dreaptă, există porțiuni de* $75^0$*, respectiv de* $15^0$*, prin care nu există emergență.*

**68.** O semisferă de sticlă, cu indicele de refracție n=1,50, are raza de curbură R=4,8cm. Suprafața plană a semisferei este opacă. Pe axa de simetrie, în exterior, unde indicele de refracție este n'=1 (aer), dincolo de polul semisferei, este aşezată o sursă luminoasă punctiformă S. a). Să se determine distanța x de la sursa S până la centrul O al suprafeței plane ştiind că raza r a petei luminoase (circulare) de pe acest „ecran" opac al bazei are valoarea minim posibilă; b). Cât este valoarea minimă ($r_{min}$) a razei r ? ; c). Reprezentați grafic dependența $r = r(x)$ şi calculați valoarea lui x pentru care r=(5/4) $r_{min}$; d). Care este cea mai mică valoare a lui x pentru care problema mai are sens ?

***Răspuns:****a). Din dependența* $r = xR\left(R\sqrt{n^2-1} + \sqrt{x^2-R^2}\right)^{-1}$ *găsim că* $x = nR\big/\sqrt{n^2-1} \equiv x_0 = 6{,}44\text{cm}$ *; b).* $r_{min} = r(x_0) = R/n = 3{,}20\text{cm}$ *; c). Există*

*soluțiile* $x_{1,2} = 5nR\left((4\sqrt{n^2-1} \pm 3)\big/(16n^2-25)\right)$ *cu valorile numerice* $x_1 = 4.82cm$, $x_2 = 24.45cm.$; d). $x = R = 4{,}80cm.$

**69**. Să se arate că, pentru puncte obiect situate la infinit, caustica oglinzilor sferice concave are forma unei suprafețe generate prin rotirea unei epicicloide în jurul axului optic principal.

***Rezolvare:*** *Vom stabili mai întâi așa-numita formulă a lui Petit. Având în vedere simetria de rotație vom putea lucra într-un anumit plan meridian. În figura B.10, punctul obiect P are ca imagine extra-axială, construită cu două raze luminoase infinit vecine, punctul M, care aparține causticii. Ținând cont de legea reflexiei (din I și I') găsim ușor că*

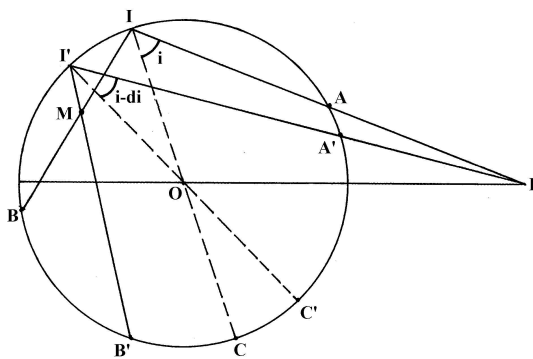



Figura B.10

2arc(CC')=arc(BB')-arc(AA')=2arc(II'). (♦)

*Pe de altă parte, din asemănarea triunghiurilor* PAA' *și* PI'I, *respectiv* MII' *și* MB'B , *găsim că* $AA' = II'(AP/PI')$ *și* $BB' = II'(MB/MI')$. *Dacă notăm* p=PI *(poziția obiectului),* p'=IM *(poziția imaginii) și* AI=IB=4a *(vezi mai jos de ce se adoptă această convenție !), putem scrie* $AA' = (1-4a/p)II'$, $BB' = (4a/p'-1)II'$. *În cazul de față arcele și corzile infinitezimale se pot confunda. Din formula* (♦) *rezultă imediat relația* 1/p'=1/a-1/p *(formula lui Petit). De aici, când p tinde la infinit (punct obiect foarte îndepărtat) decucem că* p'=a. *Acest rezultat ne va permite să argumentăm afirmația din enunțul problemei.*

*Să ne referim acum la figura B.11 în care* PAI *este o rază de lumină incidentă ce vine de la infinit. Oglinda sferică are raza* OV= OI=R. *Construim un cerc de rază* R/2 , *cu centrul tot în* O. *Unim punctul* O *cu punctul* I *obținând astfel punctul* E. *Cu* IE *ca diametru construim cercul mic cu raza* R/4. *Coborâm din* O *o perpendiculară pe* AI *și localizăm punctul* B *la*

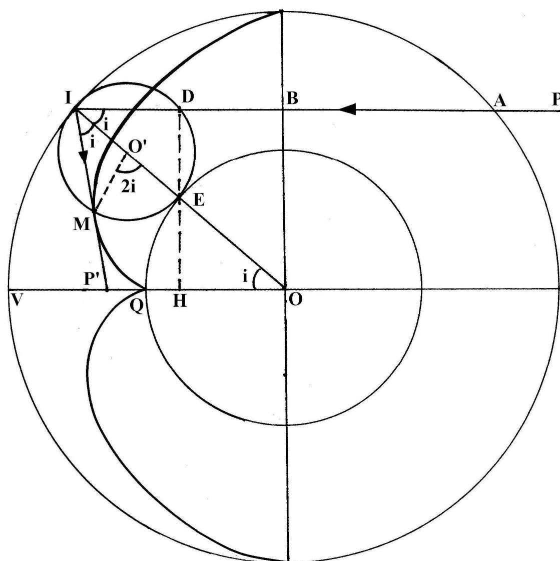



Figura B.11

*mijlocul segmentului* AI. *Dacă, prin convenţie, ca mai sus,* AI=4a*, putem scrie* IB=AB=2a*. Fie* D *punctul de intersecţie dintre* BI *şi cercul mic, cu raza* R/4*. Unim punctele* E *şi* D *şi, în prelungirea acestui segment, pe axul optic principal, găsim punctul* H*.Unghiul* IDE *fiind drept (căci* I *şi* E *sunt capetele unui diametru) rezultă că şi unghiul* EHO *este drept. Triunghiurile dreptunghice* IDE *şi* OHE *sunt egale şi rezultă că* ID=HO *care, la rândul său, satisface relaţia* HO=DB *(prin construcţie). Aşadar* ID=DB *ceea ce înseamnă că punctul D este la mijlocul segmentului BI. Acum putem scrie* ID=a*. Pe raza reflectată* IP'*, punctul de intersecţie cu cercul mic (punctul* M*) va satisface relaţia* IM=ID=a*. Având în vedere formula lui Petit (cu p infinit de mare) tragem concluzia că punctul* M *aparţine causticii. Mai observăm că* arc(QE)=i(R/2) *şi* arc(ME)=2i(R/4) *sunt egale ca lungime. Prin urmare, secţiunea causticii cu planul meridian este o **epicicloidă** care se obţine rostogolind cercul cu raza* R/4 *între cercurile de rază* R *şi* R/2*. Epicicloida are vârful în punctul* Q*. Forma întregii caustici, ca suprafaţă de rotaţie, poate fi acum imaginată uşor.*

**70.** Pe o oglindă sferică, concavă, cu raza de curbură $R_1$, se lipeşte o lentilă menisc-divergentă subţire, având razele de curbură $R_1$, respectiv $R_2$. Ştiind că, în condiţii de paraxialitate, acest sistem funcţionează ca far (*proiectorul lui Mangin*) pentru surse punctiforme plasate în centrul de curbură $C_2$, să se determine valoarea razei de curbură $R_2$. Se cunoaşte indicele de refracţie n al lentilei.

***Răspuns:*** $R_2 = \left((2n-1)/2n\right)R_1$.

**71.** Un vas cilindric de mari dimensiuni, conţinând mercur, se roteşte uniform în jurul unei axe verticale ce trece prin centrul său. Suprafaţa mercurului din vas capătă forma unei suprafeţe de rotaţie şi se foloseşte ca oglindă. Ce caracteristici are această oglindă şi care sunt parametri de care depind ele ? *Notă:* În anul 1992, la Observatorul astronomic din Vancouver (Canada) s-a construit o astfel de instalaţie, vasul cilindric având diametrul de 2,7 metri iar viteza unghiulară de rotaţie era de 9,5 rotaţii pe minut.

***Răspuns:*** *Cu Oz ca axă verticală şi notând cu r distanţa de la axa de rotaţie se obţine uşor ecuaţia* $z = \frac{\omega^2}{2g}r^2 + \text{const}$ *. Este vorba de un paraboloid ce serveşte ca oglindă cu distanţa focală* $f = g/2\omega^2$ *.La Vancouver f=4,96m. Viteza tangenţială a unui punct de la periferia oglinzii este* $v = \omega D/2 = 1{,}34\,\text{m/s} = 48{,}4\,\text{km/oră}$ .

**72.** Două oglinzi plane, paralele, $M_1$ şi $M_2$ , sunt aşezate faţă în faţă, la distanţa e una de alta. La distanţa p faţă de cea de-a doua oglindă şi la distanţa e-p faţă de prima oglindă se află un punct luminos S. Utilizând metoda matriceală şi ţinând cont de reflexiile multiple posibile, să se localizeze imaginile lui S în cele două oglinzi.

***Răspuns****: În oglinda $M_2$, imaginile succesive sunt localizate la* $(-p+2ke)$ *şi la* $(+p-2ke)$ *. În oglinda $M_1$ imaginile succesive sunt localizate la* $(+p+2ke)$ *şi la* $(-p-2ke)$ *, k întreg.*

**73.** Distanţa dintre o oglindă sferică concavă, cu raza de curbură R , şi un ecran aşezat normal pe axul optic principal, este d. 1).La ce distanţă faţă de vârful oglinzii trebuie plasat, pe

axul optic principal, un obiect de mici dimensiuni, pentru a obține pe ecran imaginea sa clară ? 2). Cât este mărirea transversală corespunzătoare ?

***Răspuns**:1).* Rd/(2d-R)*; 2).* –(2d-R)/R.

**74.** O cameră de formă dreptunghiulara are fixată, pe un perete, o oglindă plană iar pe un perete alăturat, un tablou. În ce regiune a camerei trebuie să se afle un observator pentru a putea observa imaginea tabloului în oglindă, pe toată lățimea sa ? Se va admite că ochii observatorului se află la nivelul planului orizontal median al oglinzii şi tabloului. Răspundeți printr-o construcție grafică argumentată !

**75.** Într-un balon sferic, cu pereți de sticlă foarte subțiri, având diametrul $2R = 4\text{cm}$, cu aer în interior, ca şi în exterior, se formează două imagini ale flăcării unei mici lumânări exterioare, determinate de reflexia pe peretele apropiat, respectiv îndepărtat al sferei. a). Determinați distanța $x$ dintre centrul balonului şi piciorușul lumânării știind că raportul mărimii imaginilor (luate în valoare absolută) este $k = 19/21$. b). Precizați natura celor două imagini şi care dintre ele este mai mare. c). Determinați poziția imaginilor față de centrul balonului sferic.

***Răspunsuri:** a).* $x = R(1+k)/2(1-k) = 10R = 20\text{cm}$. *b). Imaginea îndepărtată este reală, iar cea apropiată este virtuală. Cea virtuală este mai mare. c).Imaginile se află la distanțele:* $x_1 = xR/(2x-R) = 20/19 = 1{,}05$ cm, *pentru cea virtuală;* $x_2 = xR/(2x+R) = 20/21 = 0{,}95\text{cm}$*, pentru cea reală.*

**76.** O cavitate sferică, cu suprafața exterioară argintată, are o deschidere conică, cu unghiul la centru $2\alpha$.Asupra acestei deschideri cade normal, din exterior, în mod simetric, un fascicul luminos omogen, paralel cu axa conului (cu vârful în centrul sferei). O parte din razele de lumină care suferă o singură reflexie, ies din cavitate, propagându-se înapoi . a). Să se determine fracțiunea $f$ de energie luminoasă ce iese din sferă după o singură reflexie; b). Pentru ce valoare a unghiului $\alpha$ fracțiunea determinată anterior are valoarea maxim posibilă ? c). Ce valoare are fracțiunea $f$ în limita $\alpha \to 0$ ?

***Răspunsuri**:a). Printr-o construcție grafică simplă, se poate constata că nu toate razele de lumină care intră în cavitate pe partea de sus (jos,) pot părăsi cavitatea, după o reflexie, pe partea de jos (sus). Ies afară doar razele al căror unghi de incidență este mai mic decât* $\alpha/3$ *. În consecință* $f = (\sin(\alpha/3)/\sin\alpha)^2$ *; b). Pentru f=1 obținem* $\alpha = 135^o$ *; c). Cînd* $\alpha \to 0$ , $f \to 1/9$ .

**77.** Raza de curbură a unei oglinzi sferice concave este R iar axul său optic principal este Ox, punctul O fiind vârful oglinzii. Oglinda este scobită într-un bloc masiv de sticlă. Calculați grosimea stratului de sticlă ce trebuie şlefuit suplimentar, la distanța y de axul optic principal, pentru a transforma oglinda sferică în oglindă parabolică , fără a modifica localizarea vârfului şi focarului oglinzii. Aplicație numerică: R= 33 metri (corespunde obiectivului telescopului de la Mont Palomar), y=2.5 metri.

***Răspuns**:Pe direcția (şi în prelungirea) dreptei ce trece prin centrul de curbură al oglinzii sferice şi punctul, de pe respectiva oglindă, care are ordonata y, se şlefuieşte suplimentar un strat cu grosimea* $\Delta r = y^4/8R^3$ *. În aplicația numerică* $\Delta r = 0{,}136\,\text{mm}$ .

**78**. Patru oglinzi plane, egale două câte două, aşezate în plan vertical ca în figura B.12, formează o cutie prismatică cu aer în interior. În fiecare din colţuri există câte un orificiu prin care lumina poate intra sau ieşi în/din interiorul cutiei. Ştiind că toate orificiile sunt plasate la aceeaşi înălţime faţă de bază să se determine orientările posibile ale razei incidente de pe desen care poate ieşi printr-unul din celelalte orificii după un număr oarecare de reflexii pe oglinzi. Planul de incidenţă al razei de lumină este paralel cu masa orizontală pe care se află cutia. Se cunosc lungimile A şi B ale laturilor cutiei.

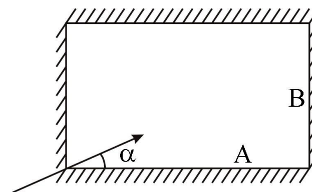


Figura B.12

***Răspuns***: $\text{tg}\alpha = nA/mB$ *cu n şi m numere întregi.*

**79.** Oglinda retrovizoare de pe parbrizul interior al autoturismelor poate fi manevrată (se poate roti) astfel ca, noaptea, şoferii să nu fie „orbiţi” de lumina puternică a farurilor maşinilor care vin din spate: după rotirea oglinzii, aceeaşi imagine care iniţial „orbea”, se vede mult slăbită în intensitate (şi nu îl mai deranjează pe şofer). Pentru a se obţine acest efect feţele sticlă-aer (dinspre ochii şoferului) şi faţa de sticlă argintată a oglinzii (de la baza ei) nu sunt paralele , între ele existând un anumit unghi. Cât de mare este acest unghi dacă oglinda poate fi rotită cu α= 6 grade iar indicele de refracţie al sticlei este n=1,50 ?

***Indicaţie şi răspuns:*** *În calculul aproximativ pe care va trebui să îl faceţi pentru obţinerea răspunsului la întrebarea din enunţ, nu veţi considera şi deviaţia luminii în plan orizontal. Veţi admite că lumina se propagă (numai) în plan vertical şi că axa de rotaţie a oglinzii , orizontală, este perpendiculară pe acest plan. Unghiul de rotaţie este* $\beta = \alpha / n = 4$ *grade.*

**80**. Proprietăţile dispersive ale unei sticle optice sunt descrise de formula $n^2 - 1 = \lambda^2 A_1 / (\lambda^2 - \lambda_1^2) + \lambda^2 A_2 / (\lambda^2 - \lambda_2^2)$, unde $A_1 = 0{,}5306$, $A_2 = 4{,}3356$, $\lambda_1 = 17500\,\text{nm}$, $\lambda_2 = 1060\,\text{nm}$. Determinaţi, pentru această sticlă, valoarea *“numărului V”* definit în felul următor: $V = n_g / (n_a - n_r)$. Semnificaţia indicilor (g=galben, a=albastru, r=roşu) este cea din formula (266), Capitolul II.

***Răspuns**: 55,3.*

**81**. O prismă de sticlă a cărei secţiune principală este un triunghi isoscel (unghiurile de la bază sunt egale cu θ), stă cu baza sa în apă, în poziţie orizontală ca în figura B.13. O rază incidentă de lumină, ce vine din aer paralel cu suprafaţa apei (şi perpendicular pe axa de simetrie a prismei) şi pătrunde în prismă, este reflectată total la interfaţa sticlă/apă şi apoi iese din sticlă în aer. Cunoscând indicii de refracţie pentru sticlă (3/2) şi pentru apă (4/3), precizaţi valorile unghiurilor θ de la baza prismei pentru ca acest traiect luminos să fie posibil.

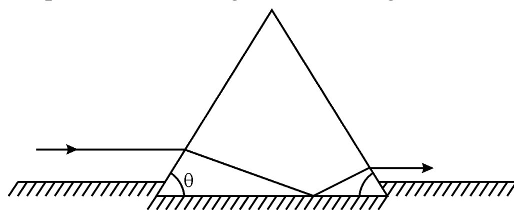


Figura B.13

***Răspuns :*** $\cos\theta \le \left[\left(n_s^2 - n_a^2\right) / \left(1 + n_s^2 - 2n_a\right)\right]^{1/2} = \sqrt{17/21}$. *Este deci necesar ca* $\theta \ge 25{,}88^0$.

**82.** Un conductor cilindric de lumină, cu secțiunea transversală circulară având diametrul D, este confecționat dintr-un material flexibil, transparent, cu indicele de refracție n=3/2.La un moment dat el trebuie să facă o schimbare de direcție de $\pi/2$ radiani (sfert de cerc). Cât trebuie să fie raza exterioară R a cotului sfert de cerc pentru ca lumina ce se propagă în interiorul conductorului să nu iasă afară, în aer ?

***Răspuns:*** $R \geq Dn/(n-1) = 3D$.

**83.** O lentilă groasă, biconvexă,simetrică, are razele de curbură de 30 cm şi indicele de refracție n=1,50. Grosimea lentilei, la mijlocul său, este g=30 cm. În stânga lentilei, la distanța p=120 cm de vârful din partea stângă se află un mic obiect, aşezat perpendicular pe axul optic principal al lentilei. Să determine natura şi localizarea imaginii obiectului. Cât este mărirea sa transversală ?

***Răspuns**:Imaginea este reală şi răsturnată. Ea este localizată în dreapta lentilei la distanța* $p' = g(p+g)/[p(n^2-1)-g] = 37{,}5\text{cm}$ *față de vârful din dreapta. Mărirea transversală este* $m_t = (p+g)/np = 0{,}375$.

**84.** Pentru orice lentilă se poate defini un parametru q (numit *„factor de formă”*) în funcție de razele de curbură $R_{1,2}$ prin relația $q = (R_2 + R_1)/(R_2 - R_1)$ .Considerând o lentilă convergentă cu distanța focală f=20 cm, confecționată din sticlă cu indicele de refracție n=1,50 (plasată în aer) şi o variație a lui q de la -2 la +2 , cu un pas $\Delta q$=0,25, calculați razele de curbură corespunzătoare şi reprezentați grafic dependența de q a aberației de sfericitate şi a comei. Se va admite că unghiul razei incidente este dat de relația $\gamma = \text{arctg}(1/5)$ şi că ea are o înălțime de 1 cm deasupra axei.

**85.** O rază verticală de lumină cade pe o sferă transparentă, cu raza R şi indicele de refracție n la distanța d<R față de axa verticală ce trece prin centrul sferei. Pentru ce relație între n şi d, raza refractată se va intersecta cu axa verticală în interiorul sferei ?

***Răspuns***: $(d/R)^2 > 1-(1/4)(n^2-2)^2$.

**86.** Stabiliți legătura dintre mărirea longitudinală ($\gamma$) şi cea transversală ($\beta$) la o lentilă subțire.

***Răspuns**:Dacă obiectul axial are capetele plasate la distanțele* $|z_1|$ *şi* $|z_2|$ *față de lentilă iar imaginile capetelor se formează la distanțele* $|z_1'|$ *şi* $|z_2'|$ *față de lentilă, atunci, prin definiție,* $\gamma = (z_2' - z_1')/(z_2 - z_1)$. *Se obține uşor relația* $\gamma = \beta_1\beta_2$, *unde* $\beta_{1,2}$ *reprezintă măririle transversale corespunzătoare capetelor. Pentru un segment axial foarte scurt, putem considera* $\beta_1 \approx \beta_2 \equiv \beta$ *şi în consecință* $\gamma \approx \beta^2$.

**87.** Considerăm planul meridian yOz al unei lentile convergente subțiri (distanță focală f), respectiv al unei oglinzi sferice concave (rază de curbură R ) pentru care Oz este ax optic principal. Fie $z'$ şi $z_0'$ imaginile punctelor axiale z şi $z_0$ în lentilă, respectiv în oglindă. Arătați că imaginea dreptei $y = m(z - z_0)$ în lentilă este dreapta $y' = m(z_0/f + 1)(z' - z_0')$ iar în oglindă este dreapta $y' = m(z_o/f - 1)(z' - z_o')$, cu $f = R/2$.

***Indicație**: În ambele cazuri se utilizează relațiile punctelor conjugate optic.*

**88.** În poziție perpendiculară pe axul optic principal, se așează un obiect în fața unei lentile convergente. Pe un ecran se obține imaginea clară a obiectului, mărirea transversală fiind $\beta_1$. Se îndepărtează obiectul cu distanța d față de poziția inițială și, deplasând ecranul, se reobține imaginea clară a obiectului, mărirea transversală fiind acum $\beta_2$. Ce distanță focală are lentila ?

***Răspuns:*** $f = (\beta_1\beta_2/(\beta_1 - \beta_2))d$.

**89.** Dintr-o sferă de sticlă cu raza R și indicele de refracție n s-a decupat și s-a eliminat o calotă cu înălțimea $R(1-1/n)$ (vezi figura B.14). În mijlocul feței plane se așează o sursă luminoasă punctiformă S. Arătați că toate razele de lumină ce pătrund în sferă vor ieși din ea pe direcții care, prelungite , se întâlnesc într-un punct S' aflat pe axa de simetrie OS, la distanța OS'=nR față de centrul O al sferei (cu alte cuvinte, arătați că punctele S și S' sunt *aplanatice* față de suprafața dioptrului sferic).

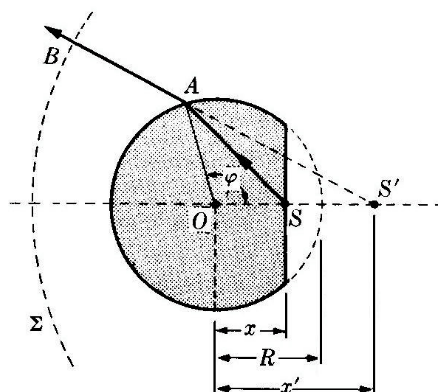



Figura B.14

***Indicație:*** *Se consideră suprafața sferică Σ, cu centrul în S', de rază r (o valoare arbitrară). Dacă S' este imaginea virtuală a lui S , conform principiului lui Fermat, drumul optic de la S la Σ al oricărei raze de lumină trebuie să fie același (constant). Pentru raza de lumină SAB, care se refractă în punctul A de pe sferă (în exterior fiind aer) obținem ușor că*

$$(SAB) = r - \sqrt{R^2 + x'^2 - 2Rx'\cos\varphi} + n\sqrt{R^2 + x^2 - 2Rx\cos\varphi},$$

*unde* x *și* x′ *(necunoscute) au semnificația din figură. Din condiția ca derivata în raport cu unghiul* φ *a acestui drum optic să se anuleze pentru* ***orice*** *valori ale lui* φ, *rezultă valorile* $x = R/n$ *și* $x' = Rn$, *care coincid cu cele din enunț (observați că* $xx' = R^2$*; S și S' sunt punctele lui Weierstrass-Young).*

**90.** Pentru o lentilă sferică groasă, confecționată din sticlă (indice de refracție $n > 1$) și plasată în aer (indice de refracție 1), având razele de curbură $r_1$ și $r_2$ și grosimea axială $d(>0)$, distanța focală f se calculează cu formula $f = nr_1r_2/\{(n-1)[n(r_2 - r_1)] + (n-1)d\}$. Convențiile de semn utilizate sunt următoarele: $r_i > 0$ înseamnă că centrul de curbură $O_i$ se află la dreapta vârfului $S_i$ al dioptrului respectiv iar $r_i < 0$ înseamnă că centrul de curbură $O_i$ se află la stânga vârfului $S_i, i = 1,2$ (vezi figura B.15). În practică, pentru diverse aplicații, este necesar ca distanța focală să fie independentă de lungimea de undă λ a luminii incidente pe lentilă *(acromatizare)*.

1). Pentru câte lungimi de undă diferite se poate obține o aceeași distanță focală f ?

2). Stabiliți relația dintre razele de curbură $r_i, i = 1,2$, grosimea d și indicii de refracție pentru care este îndeplinită cerința de la punctul precedent. Discutați această relație și desenați forma lentilei în toate cazurile în care relația poate fi satisfăcută.

3). Arătați că în cazul unei lentile plan-convexe se poate obține o distanță focală bine-determinată numai pentru o singură lungime de undă.

4). Indicați toate situațiile în care se obține o distanță focală bine determinată numai pentru o singură lungime de undă, precizând condițiile în care s-ar realiza aceste situații și valorile indicelui de refracție.

***Indicații și răspunsuri:*** *1). Pentru două lungimi de undă căci relația din enunț are forma* $A(f)n^2 + B(f)n + C(f) = 0$ *iar* $n(\lambda)$ *este funcție monotonă.*

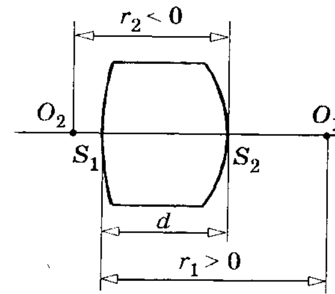



Figura B.15

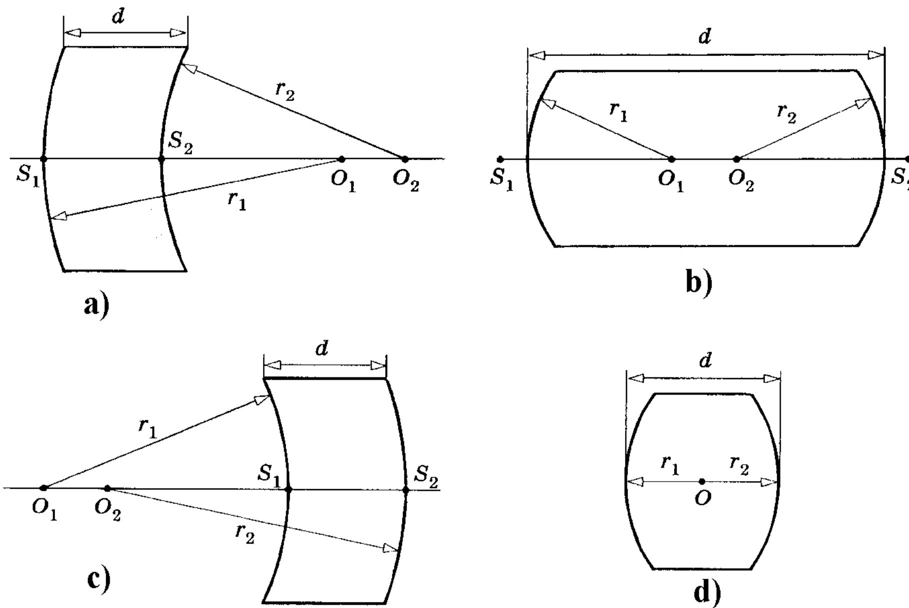



Figura B.16

*2).Din condiția* $f(n_1) = f(n_2)$ *obținem imediat relația* $n_1 n_2 (n_2 - n_1)(r_2 - r_1 + d) = (n_2 - n_1)d$. *Dacă* $n_1 \neq n_2$ *găsim că* $r_1 - r_2 = d(1 - 1/n_1 n_2)$. *Deoarece ambii indici de refracție sunt supraunitari rezultă cu necesitate că* $0 < r_1 - r_2 < d (> 0)$ .

*Sunt posibile următoarele situații:*

*a).* $r_1 > 0, r_2 > 0$ *cu* $r_2 < r_1 < r_2 + d$ *; ambele centre de curbură sunt la dreapta vârfurilor corespunzătoare și* $O_1O_2 < S_1S_2$ *ca în figura B.16.a ;*

*b).* $r_1 > 0, r_2 < 0$ *și* $0 < |r_1| + |r_2| < d$ *, ca în figura B.16.b .*

*c).* $r_2 < 0, r_1 < 0$ *și* $0 < |r_2| - |r_1| < d$ *, adică* $|r_1| < |r_2| < d + |r_1|$ *(acum ambele centre de curbură sunt la stânga vârfurilor corespunzătoare și* $O_1O_2 < S_1S_2$ *, ca în fig. B.16.c).*

*d). cazul* $r_1 < 0, r_2 > 0$ *nu este posibil deoarece acum diferența* $r_1 - r_2$ *este negativă și nu poate fi satisfăcută condiția generală dedusă mai sus.*

*3). Luăm limita* $r_2 \to \infty$ *în relația din enunț și obținem* $f = r_1/(n-1)$ *astfel că fiecărui n îi corespunde un unic f.*
*4). În ecuația de la punctul 1). avem* $A(f) = (r_2 - r_1 + d)f$, $B(f) = -[(r_2 - r_1)f + 2fd + r_1r_2]$, $C(f) = fd$. *Situațiile posibile sunt următoarele:*
*a).* $A = 0,\ n = -C/B > 1$. *Aceasta înseamnă* $r_1 = r_2 + d$, $n = fd/[(r_2 - r_1)f + 2fd + r_1r_2] = fd/(fd + r_1r_2) > 1$.
*Este obligatoriu ca* $r_1r_2 < 0$, *adică* $r_2 < 0,\ r_1 > 0,\ d = |r_1| + |r_2|$, *ca în fig. B.16.d.*
*b). Anularea discriminantului ecuației, adică relația,* $B^2(f) = 4A(f)C(f)$, *echivalentă cu relația* $[f(r_2 - r_1) + r_1r_2]^2 + 4fdr_1r_2 = 0$, *ne dă soluția unică* $n = -B/2A$, *adică* $n = [f(2d + r_2 - r_1) + r_1r_2]/[2f(d + r_2 - r_1)] > 1$.
*c).* $B(f) = 0$ *ne dă* $n = (-d/(r_2 - r_1 + d))^{1/2} > 1$.
*d). Sunt posibile de asemenea situații cu o rădăcină negativă,sau subunitară, cealaltă fiind pozitivă și supraunitară.*

**91.** Dispunem de o semisferă de sticlă cu raza R şi indicele de refracție n=2, din care se elimină în mod simetric o porțiune cu suprafață sferică astfel încât, în final, pe linia centrelor de curbură, grosimea lentilei rămase (măsurată între cele două vârfuri ) este R/2. În exteriorul lentilei este aer.În centrul semisferei de rază R se aşază un obiect punctiform. Unde se va vedea imaginea obiectului punctiform formată de această lentilă groasă, dacă ochiul observatorului este aşezat foarte departe de lentilă, pe linia centrelor de curbură?

***Răspuns:*** *Raza de curbură a porțiunii eliminate este 1,25R. Distanța de la imagine la vârful dioptrului cu raza de curbură R este egală cu (17/11)R.*

**92.** În lungul axului optic principal al unei lentile convergente subțiri , cu distanța focală $f = 5\text{cm}$, se mişcă doi licurici cvasipunctiformi, unul spre celălalt , dar situați unul la stânga,iar celălalt la dreapta lentilei. Viteza ambilor licurici este aceeaşi $v = 2\text{cm/sec}$. La momentul inițial, ei se află față de lentilă la distanțele $d_1 = 20\text{cm}$ (cel din stânga), respectiv $d_2 = 15\text{cm}$ (cel din dreapta). După cât timp se întâlneşte al doilea licurici cu imaginea primului licurici ? Dar primul licurici cu imaginea celui de al doilea ?

***Răspuns****: În ambele situații* $t = (5/4)(5-\sqrt{5}) = 3{,}455$ sec.

**93.** În interiorul unei sfere de sticlă cu raza R=1 cm, la distanța d=0,6 cm de centrul său, se află o sursă luminoasă punctiformă, care emite în mod izotrop. Pentru ce valori ale indicelui de refracție n al sticlei din care este confecționată sfera, întregul flux luminos emis de sursă poate ieşi în exterior din sferă ? Cât este fracțiunea de energie luminoasă care iese din sferă în exterior în cazul când n=1,6 ?

***Răspuns:*** *Pentru ca tot fluxul luminos să poată ieşi afară (să nu apară încă reflexia totală) este necesar ca* $n < 5/3 = 1{,}66(6)$. *Valoarea din enunț satisface această condiție, deci* $f = 1$.

**94.** O sferă omogenă de sticlă, aflată în aer, are indicele de refracție n=1,50 şi raza R=1,5 cm. Determinați elementele cardinale ale acestui sistem. Ce se întâmplă cu aceste elemente

cardinale când mediul de ieşire (spaţiul imagine) se modifică, având indicele de refracţie n'=1,40 ?

***Răspuns:****În cele două situaţii matricele de transfer sunt* $\begin{bmatrix} 1/3 & 0,02 \\ -400/9 & 1/3 \end{bmatrix}$ *respectiv* $\begin{bmatrix} 1/3 & 0,02 \\ -320/9 & 2.6/3 \end{bmatrix}$. *În primul caz,* $f_i = -f_0 = 2,25\text{cm}$, *iar în al doilea caz* $f_i = 3,9\text{cm}$, $f_0 = -2,8\text{cm}$, *ş.a.m.d.*

**95.** Ocularul lui Plössl are simbolul (3,1,3) . Determinaţi elementele sale cardinale ştiind că distanţa dintre lentile este de 1 cm.

***Răspuns:*** $T_{O_1O_2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -C & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & g \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -C & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2/3 & u \\ -5/9u & 2/3 \end{bmatrix}$, *unde u=g şi C=1/3u, deoarece, conform enunţului* $f_1/3 = g/1 = f_2/3 = u = 1\text{cm}$. *Se constată că* $\det T_{O_1O_2} = 1$. *Rezultă*

$C_{ocular} = 55,55\text{m}^{-1}$, $f_i = -f_0 = 1,8\text{cm}$,

$O_2H_i = -0,33f_i = -0,6\text{cm}$, $O_1H_0 = +0,33f_i = +0,6\text{cm}$,

$O_2F_i = O_2H_i + H_iF_i = 1,2\text{cm}$, $O_1F_0 = O_1H_0 + H_0F_0 = -1,2\text{cm}$.

**96.** O cavitate laser este un sistem optic echivalent cu o lamă de grosime L ale cărei feţe paralele sunt perpendiculare pe axul optic. Mediul optic-activ din interiorul cavităţii are indicele de refracţie n şi este mărginit de două oglinzi sferice concave, identice, $M_1$ şi $M_2$, de foarte bună calitate. Lumina este emisă de mediu, propagându-se axial şi, după ce se reflectă de mai multe ori pe oglinzi (plimbându-se dus-întors prin mediu) iese prin centrul $V_2$ al oglinzii $M_2$ (parţial transparentă). a). Exprimaţi distanţa focală a oglinzilor în funcţie de raza lor de curbură (R) ; b). Distanţa dintre oglinzi este d>L. Se notează g=d-L(n-1)/n . În cazul când g este egal cu raza de curbură R a oglinzilor, calculaţi matricea de transfer pentru un parcurs dus-întors complet al luminii. După câte parcursuri tur-retur un obiect plasat în $V_2$ coincide cu imaginea sa ?

***Răspuns:****a). Convergenţa este 2/R astfel că f=R/2. b). Matricea* $T_{V_2V_2}$ *este produsul a patru matrice:propagare 2-1, reflexie pe* $M_1$, *propagare1-2, reflexie pe* $M_2$*). La propagarea de la* $M_1$ *la* $M_2$ *(sau invers) putem scrie*

$$T_{1,2} = \begin{bmatrix} 1 & d_2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & L/n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & d_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & g \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

*căci* $d_1 + d_2 = d - L$. *Revenind la calculul lui* $T_{V_2V_2}$ *ca produs de patru matrice şi considerând g=R, constatăm că acesta este chiar minus matricea unitate. Aşadar,* $T^2_{V_2V_2} = I$. *Sunt deci necesare două parcursuri complete tur-retur. Cavitatea se numeşte confocală deoarece focarele celor două oglinzi coincid (sunt la mijlocul cavităţii).*

**97.** Obiectivul unei lunete ce lucrează în aer este format prin acolarea unei lentile plan-convexe ($R_1 = 10\text{cm}, n_1 = 1.50$, grosime 3cm ) cu o lamă cu feţe plan-paralele (grosime 1,2 cm, $n_2 = 1,2$) şi apoi cu o lentilă plan–convexă ($R_2 = 40\text{cm}, n_3 = 1,80$, grosime 1,8 cm).

Lumina incidentă cade pe fața cu raza de curbură $R_1$. a). Determinați matricea de transfer și deduceți elementele cardinale; b). Se schimbă sensul de propagare ; determinați noile elemente cardinale ale obiectivului.

***Răspuns:*** *a).* $T = \begin{bmatrix} 0,8 & 0,04 \\ -3,4 & 1,08 \end{bmatrix}$ *cu* $\det T = 1$. *Convergența este de 3,4 m*$^{-1}$*,* $f_i = -f_0 = 29,4\text{cm}, \text{etc.}$ *b).* $T' = \begin{bmatrix} 1,08 & 0,04 \\ -3,4 & 0,8 \end{bmatrix}$ *cu* $\det T' = 1$. *Planele principale și focarele se intervertesc.*

**98.** Un sistem centrat este format din două lentile situate la 20 cm una de alta, având centrele de curbură pe același ax optic principal. Prima lentilă este plan-convexă ($n_1 = 1,50$, $g_1$= 15cm, $R_1 = \infty$, $R_2 = -0,5\text{m}$) iar a doua este concav-plană ($g_2 = 15\text{cm}$, $n_2 = 1,50$, $R_3 = -1\text{m}$, $R_4 = \infty$).

a). Determinați matricea de transfer și elementele cardinale când lumina se propagă de la stânga spre dreapta; b). Construiți raza emergentă ce corespunde unei raze incidente cu înclinarea $\alpha_1 = 0,05\text{rad}$ ce atinge planul de intrare la distanța $y_1 = 5\text{cm}$ față de ax; c). Unde se formează imaginea unui obiect situat chiar pe fața de intrare ?

***Răspuns:*** *a).* $T = \begin{bmatrix} 0,74 & 0,384 \\ -0,6 & 1,04 \end{bmatrix}$ *cu* $\det T = 1$. *Valoarea* ***c****onvergenței este de* $0,6\ \text{m}^{-1}$, $f_i = -f_o = 1,67\text{m}$, *punctele principale și nodale coincid. b). La ieșire* $y_2 = 0,056\text{m}$, $\alpha_2 = 0,022\text{rad}$ *. c). Imaginea se formează la distanța de 6,4 cm față de planul principal corespunzător.*

**99.** Un obiectiv de lunetă astronomică, ce lucrează în aer, este format prin acolarea unei lentile biconvexe ($n_1 = 1,50, R_1 = 5\text{cm} = -R_2, g_1 = 3\text{cm}$) cu o lentilă concav-plană ($R_3 = R_2, R_4 = \infty, n_2 = 1,60, g_2 = 1,6\text{cm}$).

a). Determinați elementele cardinale ale obiectivului când lumina se propagă de la stânga spre dreapta; b). La ce distanță față de ieșirea obiectivului se formează imaginea unui obiect situat la infinit ?Dacă diametrul aparent al obiectului este de $1'$, cât este diametrul imaginii sale ?

***Răspuns****:a).* $T = \begin{bmatrix} 0,716 & 0,0304 \\ -8,4 & 1,04 \end{bmatrix}$ *cu* $\det T = 1$. *Convergența obiectivului acestei lunete astronomice este de 8,4m*$^{-1}$*;*

$f_i = -f_o = 11,9\text{cm}, V_2H_i = -3,38\text{cm}, V_1H_o = -0,48\text{cm}, H_i = N_i, H_0 = N_0$;

*b).* $V_2F_i = 8,5\text{cm}, \phi_i = 3.10^{-4}\text{rad}$ *și diametrul aparent este de 36μm.*

**100.** Între cornee (intrare) și retină (ieșire) ochiul unui om poate fi descris de următoarea matrice de transfer $T_{CR} = \begin{bmatrix} 0 & 1,67.10^{-2} \\ -60 & 0,9 \end{bmatrix}$, exprimată în unități SI. Știind că indicii de refracție ai spațiilor obiect, respectiv imagine sunt 1,000 și 1,336 și că distanța cornee-retină este de 24,3mm, aflați raza de curbură a dioptrului sferic echivalent.

***Răspuns:*** *Din matricea de transfer găsim* $C_o = 60m^{-1}, f_i = 22{,}3mm$, $f_o = -16{,}7mm$, $V_1H_i = -f_i = -22{,}3mm$, $V_1H_0 = (0{,}9-1)f_0 = 1{,}67mm$, $H_0H_i = 0{,}33mm = N_0N_i$. *Distanța* $H_iN_i = f_0 + f_i = 5{,}6mm$ *dă raza de curbură a dioptrului sferic echivalent deoarece* $V_2 = H_i$ *și* $C = N_i$.

**101.** **F**olosind metoda matriceală, să se studieze propagarea unei raze de lumină ce traversează,de la stânga spre dreapta, o lamă de sticlă cu fețe plan-paralele, de grosime g și indice de refracție n, știind că ea se află între două medii omogene,transparente, cu indicii de refracție $n_1$ (în stânga, la intrare) și $n_2$ (în dreapta, la ieșire). Vectorul unicoloană (de stare ) al razei incidente se presupune cunoscut.

**102**. O lentilă biconvexă subțire, confecționată din sticlă cu indicele de refracție n, are fața din stânga, cu raza de curbură R, mărginită de aer, iar fața din dreapta, cu raza de curbură 2R, mărginită de un lichid cu indicele de refracție n'. Lumina ce vine de la $-\infty$, cade pe fața din stânga. Determinați: a). distanța focală imagine și natura focarului imagine în cazul când $3n < 2 + n'$ ; b). distanța focală imagine când fața cu raza de curbură 2R se argintează.

***Răspuns****: a). În general, când în stânga avem caracteristicile* $n_1, R_1$ *iar în dreapta avem caracteristicile* $n_3, R_3$, *putem scrie formula* $n_3/x_3 - n_1/x_1 = (n_2 - n_1)/R_1 - (n_2 - n_3)/R_3$, *unde* $n_2$ *este indicele de refracție al lentilei propriu-zise.Convențiile de semn utilizate sunt cele uzuale. Aplicând această formulă generală în cazul nostru obținem* $f' = 2n'R/(3n - n' - 2)$. *Semnul numitorului dictează asupra naturii focarului. În cazul din enunțul problemei focarul este virtual.*

*b)Convergența sistemului este suma dintre convergența oglinzii și dublul convergenței lentilei:* $C_s = 2C_l + C_0$, *cu* $C_0 = 1/R$ *iar* $C_l = 3(n-1)/2R$. *În final obținem* $f_s = R/(3n-2)$ .

**103**. Farurile maritime utilizează lentile Fresnel de forma arătată în figura B.17. Este vorba despre lentile plan-convexe centrale, continuate cu mai multe inele concentrice din ce în ce mai mici, cu secțiune prismatică. Fie o astfel de lentilă cu 5 inele concentrice, confecționată din sticlă cu indicele de refracție n=1,50. Raza de curbură a lentilei centrale este R= 1 m, deschiderea sa (ca diametru) este 2ρ=20 cm. Inălțimea inelelor (în direcție perpendiculară pe axa de simetrie a lentilei) este h=2 cm. Unghiurile (refringente) de la vârful secțiunilor prismatice (de pe verticala desenului) sunt calculate în așa fel încât toate razele emergente să fie paralele cu axul optic principal. Știind că sursa luminoasă punctiformă este plasată în focarul principal obiect al lentilei centrale, să se calculeze unghiurile refringente succesive $A_m$ ale celor cinci secțiuni prismatice.

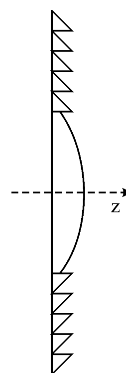


Figura B.17

***Rezolvare:*** *Conform desenului alăturat (figura B.18) rezultă că deviația Δ dată de fiecare prismă trebuie să fie egală cu unghiul de incidență* i *de la intrare. Deoarece* $\Delta = i + i' - A$, *rezultă că* $i' = A$. *Relația* $n \sin r' = \sin i'$ *cu* $r' = A - r$ *ne conduce în cele din urmă la* $\mathrm{tg}A = n \sin r/(n \cos r - 1)$. *Pe de altă parte, legea refracției la intrare are forma*

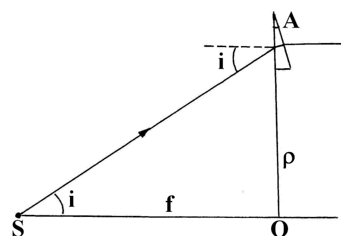


Figura B.18

$n \sin r = \sin i \approx (\rho + mh)/\sqrt{f^2 + (\rho + mh)^2}$ , *unde* $f = R/(n-1)$. *În final, pentru* $A_m$, *obținem următoarele valori:6,84⁰ , 7,97⁰, 9,11⁰, 10,22⁰, 11,34⁰.*

**104**. Două raze de lumină care se propagă spre o lentilă convergentă, având centrul optic în punctul O, se intersectează în mod simetric într-un punct A de pe axul optic principal al lentilei. Cunoscând distanța d=AO, unghiul α (mic) dintre razele de lumină precum şi distanța focală f (superioară lui d) a lentilei, să se determine unghiul β dintre raze după trecerea lor prin lentilă.

***Răspuns:*** $tg(\beta/2) = (1 - d/f)tg(\alpha/2)$.

**105.** Un disc circular de rază R pluteşte pe suprafața apei (n=4/3) dintr-un vas larg. Printr-un fir subțire cu lungimea h, fixat in centrul discului, este suspendat şi se află în apă, un mic corp punctiform. Grosimea discului este neglijabilă. Ce relație trebuie să existe între h, R şi n pentru ca corpul atârnat să poată fi văzut din aer, privind spre suprafața orizontală a apei ?

***Răspuns:*** $h \geq R\sqrt{n^2 - 1} \approx 0{,}882R$ .

**106.** Două medii optice transparente, omogene, sunt separate printr-o suprafață plană. Lumina se propagă din mediul mai refringent spre cel mai puțin refringent. Fie $\theta_C$ unghiul de incidență al reflexiei totale şi $\theta_B$ unghiul de incidență ce corespunde situației în care raza reflectată şi cea refractată sunt reciproc perpendiculare. Determinați indicele de refracție relativ al celor două medii .

***Răspuns:*** $n_2/n_1 = \sqrt{\left(\frac{\sin \theta_C}{\sin \theta_B}\right)^2 - 1}.$

**107.** O folie de retroproiector reflectă fracțiunea R (*reflectanță*) din energia luminii incidente şi transmite fracțiunea $T = 1 - R$ . Desigur, aceasta este o folie ideală, fără absorbție. Ce fracțiune de energie luminoasă vor reflecta două folii identice, aşezate una peste alta ? Reprezentați grafic această reflectanță în funcție de R , care poate varia între 0 şi 1. Ce puteți spune despre reflectanța $R_n$ a unui top de n folii identice aşezate unele peste altele ?

***Răspuns****: Se calculează mai întâi transmitanța (considerând succesivele reflexii la contactul dintre fețele foliilor) obținându-se relația* $T_2 = TT + TRRT + ... = T^2(1 + R^2 + R^4 + ...) = T^2/(1 - R^2)$. *Apoi* $R_2 = 1 - T_2 = 2R/(1 + R)$. *Pentru n folii, printr-un raționament similar, bazat pe o recurență uşor de stabilit, obținem* $R_n = nR/[1 + (n-1)R]$ , *respectiv* $T_n = (1 - R)/[1 + (n-1)R]$.

**108.** Dispunem de un semicilindru circular de gheață, cu raza R, având indicele de refracție n=1,3. Perpendicular pe fața plană este trimis spre interiorul semicilindrului un fascicul luminos îngust, care iese prin aceeaşi față plană, la distanța L de fasciculul incident. Ştiind că intensitatea fasciculului emergent este aproape egală cu cea a fasciculului incident să se determine valoarea distanței L.

***Răspuns*****:** *La interfața semicirculară gheață/aer trebuie să se producă, în mod simetric, reflexii totale, căci, numai aşa, intensitatea luminoasă poate să rămână practic constantă. Unghiurile de incidență (exprimate în grade), care pot asigura*

*traiecte simetrice sunt date de relația* $i_k = 90k/(k+1)$*, unde* $k = 1,2,3,...$*, astfel că* $L_k = 2R\sin i_k$*. Valoarea* $k = 1$ *trebuie exclusă deoarece unghiul* $i_1 = 45^o$ *este inferior lui* $i_{critic} = \arcsin(1/n) \approx 50,3^o$ .

**109.** Într-un vas cilindric de sticlă, cu pererți foarte subțiri, având raza R, umplut cu un lichid transparent, este introdus un cilindru vertical opac,cu raza r, aşezat astfel încât suprafața cilindrului este în contact cu (atinge) peretele interior al vasului. Privind din exterior, de la mare distanță, se observă că, parcă, cilindrul opac "a umplut" tot vasul. Stabiliți legătura dintre indicele de refracție n al lichidului şi raportul k=r/R. Caz particular: k=1/4.

***Răspuns:*** $\sqrt{n^2-1}\left(1-k+k/\sqrt{2(1-k)}\right) = 1-k(1-k)/\sqrt{2(1-k)}$.

*Pentru k=1/4 obținen n=1,337 (apă).*

**110.** Pentru a determina mărirea unghiulară a unei lunete de observație prin *metoda Ramsden (1735-1800),* se reglează instrumentul pentru infinit şi, după demontarea obiectivului, se aşează în locul lui un obiect de dimensiuni determinate (de pildă un ecran cu un orificiu) . Ocularul lunetei formează o imagine reală a acestui obiect. Dacă H este dimensiunea obiectului şi h-dimensiunea imaginii sale, să se determine grosismentul unghiular al lunetei.

***Răspuns**: Se foloseşte formula lui Newton pentru ocular şi se obține grosismentul unghiular H/h.*

**111.** O lentilă biconvexă, cu grosimea de 5 cm, are razele de curbură egale cu 40 cm şi este confecționată din sticlă cu indicele de refracție n=1,60. Ea este utilizată ca lupă, pentru obiecte situate în apă ($n_{apă}$=4/3), cealaltă față aflându-se în aer. Determinați distanțele focale efective ale lentilei şi precizați poziția focarelor şi a punctelor principale.

***Răspuns**: Planele principale se află în interiorul lentilei, la 2,91 cm față de vârful aflat în aer şi , respectiv, la 0,98 cm față de vârful aflat în apă. Distanțele focale sunt* $f_1 = 62,05\text{cm}$*, respectiv* $f_2 = 46,66\text{cm}$ *(față de punctele principale corespunzătoare).*

**112.** Un miop are distanța de citire fără ochelari $d_1 = 15\text{cm}$ şi distinge detalii mărunte până la distanța $d_2 = 20\text{cm}$ (*punctum remontum*). Ce ochelari îi trebuie pentru citit, respectiv pentru distanță ?

***Răspuns**: Minus 2,7 dioptrii, respectiv minus 5 dioptrii.*

**113.** O lunetă astronomică Kepler este reglată ca sistem afocal fix. Pentru a observa totuşi obiecte terestre, se introduce în lunetă încă o lentilă convergentă cu distanța focală egală cu cea a obiectivului, care se poate deplasa liber de la planul focal comun până la obiectiv. Între ce limite pot fi văzute, fără efort de acomodare, obiecte terestre ?

***Răspuns**:Limita maximă a obiectelor terestre văzute este* $\infty$*. Limita minimă este egală cu* $f_{obiectiv}$.

**114.** Un miop priveşte printr-un instrument optic după ce, anterior, prin el a privit un prezbit. Ce va face el : va împinge sau va trage spre ochiul său ocularul ?

***Rezolvare**:a). Presupunem mai întâi că fiecare ochi pune în joc toată capacitatea proprie de acomodare. În ambele cazuri, imaginea virtuală dată de instrument*

*trebuie să se formeze la punctum proximum al fiecărui ochi. Fie $\Delta_m$ şi $\Delta_p$ distanţele maxime de vedere clară ale miopului, respectiv prezbitului şi $d_m$ , $d_p$ distanţele dintre imaginea dată de obiectiv şi ocular în cazul ochiului miop, respectiv prezbit. În cele două cazuri, relaţia fundamentală a lentilelor se scrie sub forma* $1/d_m - 1/\Delta_m = 1/f$, $1/d_p - 1/\Delta_p = 1/f$ .*Prin egalarea lor (eliminăm distanţa focală f) găsim că* $d_m < d_p$ *( deoarece* $\Delta_m < \Delta_p$ *), ceea ce înseamnă că miopul va împinge ocularul . b). Dacă cei doi ochi îşi slăbesc acomodarea , imaginea se formează în punctum remontum corespunzător fiecărui ochi. Notând cu* $r_m$ , $r_p$ *distanţele la aceste puncte vom putea scrie* $1/d_m - 1/d_p = 1/r_m - 1/r_p$, *din care va rezulta din nou inegalitatea* $d_m < d_p$ *; şi de această dată miopul va împinge ocularul. c). Dacă punctum remontum al ochiului miop este mai depărtat decât punctum proximum al ochiului prezbit, se poate întâmpla ca miopul sa tragă (spre el) ocularul.*

**115.** Vârful unui con cu unghiul de deschidere $2\alpha$ este privit cu ajutorul unei lupe (distanţă focală $f$ ) aşezată la distanţa $d < f$ . Axul optic principal al lupei şi axa de simetrie a conului coincid. Să se determine unghiul de deschidere al conului observat prin intermediul lupei.

***Răspuns:*** $2\beta = 2\,\mathrm{arctg}\left[(1 - d/f)\mathrm{tg}\alpha\right]$.

**116.** Pentru testarea vederii pacienţilor medicul oftalmolog dispune de un tabel (optoscop) înalt de 50 cm şi lat de 18 cm. Tabelul trebuie privit de la distanţa de 6 m. Din lipsă de spaţiu (cabinet mic), medicul aşează tabelul pe un perete, în poziţie răsturnată, distanţa dintre podea şi marginea de jos a tabelului fiind de 2 m. La o distanţă de 3,5 m de tabel, medicul aşează o oglindă plană, cu suprafaţa paralelă cu cea a tabelului. Pacientul, ai cărui ochi se află la o înălţime de 1,2 m faţă de podea, se aşează între tabel şi oglindă, cu faţa spre oglindă. a). Cât trebuie să fie distanţa dintre pacient şi oglingă pentru ca testarea să fie corectă ? b). Care sunt dimensiunile minime ale oglinzii ştiind că pacientul vede tabelul în întregime ? c). Cât este distanţa de la podea până la latura de jos a oglinzii ?

***Răspuns**: a). Distanţa pacient-oglindă=2,5m; b). Înălţimea minimă a oglinzii este de $\approx$21 cm. Lăţimea minimă a oglinzii este de 7,5cm. c). Latura de jos a oglinzii se montează la $\approx$1,53 m faţă de podea.*

**117.** Determinaţi forma suprafeţei unei lentile plan-convexe care focalizează un fascicul paralel, ce cade normal pe faţa plană a lentilei, fără aberaţie de sfericitate. Determinaţi grosimea axială a lentilei pentru următoarele valori numerice: indicele de refracţie al sticlei n=1,50, deschiderea lentilei în plan transversal 2r=10 cm, distanţa de la focarul axial obiect la suprafaţa plană f=12 cm.

***Răspuns**:Faţă de sistemul cartezian cu originea O în centrul suprafeţei plane şi cu Ox în lungul axului optic principal,suprafaţa convexă are ecuaţia* $y^2 + (f - x)^2 = (C - nx)^2$, *unde* $C \equiv \sqrt{r^2 + f^2}$ . *Este vorba despre o hiperbolă. Grosimea lentilei este* $g = (C - f)/(n - 1) = 2\mathrm{cm}$ .

**118.** Oglinda unui proiector (reflector) are forma unei suprafeţe de rotaţie în jurul axei Ox. Ce formă y=y(x) trebuie să aibă curba ce generează prin rotaţie suprafaţa oglinzii, pentru ca

toate razele de lumină ce pornesc din originea O a sistemului xOy , unde este plasată sursa luminoasă punctiformă , şi se reflectă pe oglindă, să se îndepărteze spre infinit pe direcţii paralele cu axa Ox ? Se cunoaşte diametrul d al deschiderii oglinzii (în direcţie perpendiculară pe axa Ox) şi adâncimea h a oglinzii (în direcţia longitudinală Ox). Cât este distanţa focală a acestei oglinzi ?

***Răspuns***: *Curba căutată este parabola* $y^2 = (d^2/4h)\left(x + d^2/16h\right)$, *cu distanţa focală* $f = d^2/16h$.

**119.** Pe ambele feţe ale unei coli albe de hârtie (format $A_4$) sunt trasate, foarte apropiat şi echidistant, linii paralele cu laturile mari ale colii dreptunghiulare, existând o perfectă corespondenţă faţă-verso a acestor linii. Considerăm acum că liniile de pe una din feţe (vezi figura B.19) sunt razele de lumină ale unui fascicul paralel (venind de la infinit) şi care se propagă, în sensul săgeţilor, spre o oglindă concavă, cu simetrie de rotaţie faţă de axul optic principal AFB. Se ştie că, după reflexia pe oglindă, toate razele de lumină trec (focalizează) prin (în) punctul F. Imaginaţi o metodă prin care să reprezentaţi exact pe coala de hârtie localizarea şi forma curbei care, prin rotaţie în jurul axei AFB, generează oglinda cu proprietatea menţionată. Argumentaţi metoda propusă.

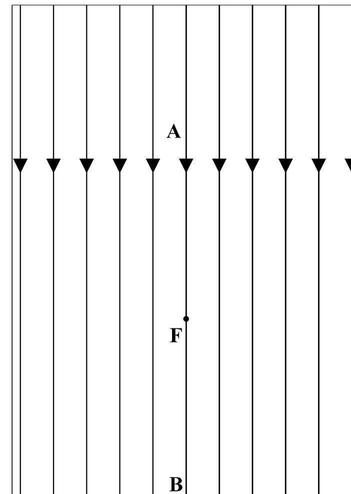


Figura B.19

***Rezolvare:****După cum se ştie, una dintre conice, anume parabola, este locul geometric al punctelor egal depărtate de un punct fix numit „focar” şi de o dreaptă dată (care nu trece prin focar), numită „directoare”. Dacă marginea de jos a colii este considerată directoare (Δ), la mijlocul distanţei FB se află vârful V al parabolei caracterizate prin focarul F şi directoarea (Δ).Să încercăm să determinăm şi alte puncte, neaxiale, ale acestei parabole. Cum s-ar putea proceda ? Să îndoim colţul din dreapta-jos al hârtiei în aşa fel încât cateta din partea stângă să treacă prin punctul F (ca în figura B.20). Constatăm că, de pe verso, se îndreaptă spre F porţiunea dreaptă CF, căreia îi corespunde verticala HC de pe faţă. Deoarece CF=CG putem afirma că punctul C, aflat pe ipotenuza triunghiului dreptunghic (colţului) îndoit, aparţine parabolei cu vârful în V (punctul F fiind focar iar (Δ)-directoare).Pe de altă parte, ipotenuza QCP este tangentă în C la parabolă. Vom demonstra acest lucru mai jos. Acum să observăm că, prin construcţie, unghiurile FCQ şi QCG sunt egale (căci, dacă dezdoim coala, ele se suprapun).Insă, unghiul HCP este egal cu unghiul QCG ,ca opuse la vârf. Rezultă egalitatea unghiurilor FCQ şi HCP care sunt complementele unghiurilor de reflexie (r-pentru raza CF), respectiv de incidenţă (i-pentru raza HC), măsurate faţă de perpendiculara (normala) CN ridicată în punctul C pe ipotenuza QP. Am arătat*

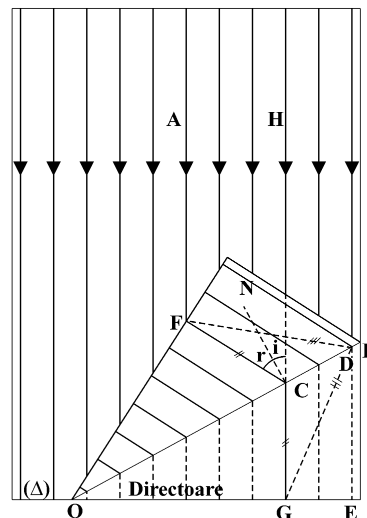


Figura B.20

*astfel că, dacă dreapta QP este tangentă în C la oglinda parabolică, raza de lumină HC se reflectă în C, respectând legile acestui fenomen, şi ajunge în F. Să ne convingem că dreapta QP este într-adevăr tangentă în C la parabolă. Fie D un alt punct de pe ipotenuza PQ. Distanţele DF şi DG sunt egale prin construcţie. Cateta DE este însă inferioară ipotenuzei DG (adică lui DF) ceea ce ne arată că punctul D este mai apropiat de directoare decât de focar (punctul D s-a îndepărtat de parabolă) . Un raţionament similar se poate face şi dacă punctul D s-ar alege între Q şi C, distanţa de la D la directoarea (Δ) fiind şi acum mai mică decât distanţa DF (şi de data aceasta punctul D s-a îndepărtat de parabolă). Rezultă că singura poziţie în care cele două distanţe sunt egale este cea în care D şi C se confundă .Punctul C de pe ipotenuză aparţine parabolei, ceea ce înseamnă că ipotenuza este tangentă la parabolă. Pentru diferite unghiuri de înclinare ale ipotenuzei (îndoiturii), cu cateta din partea stângă trecând prin F, obţinem diverse puncte analoage lui C, care aparţin parabolei. Drumul optic al tuturor razelor care ajung în F este egal cu HCG (căci CG=CF) plus o jumătate de lungime de undă (din cauza reflexiei pe oglindă).*

**120**. Punctul $P_2(a,0,0)$, aflat în mediul omogen cu indicele de refracţie $n_2$ este imaginea perfect stigmatică a punctului $P_1(0,0,0)$ aflat în mediul omogen cu indicele de refracţie $n_1$. Vârful ovalului lui Descartes care separă cele două medii se află pe segmentul $P_1P_2$, între cele două capete, adică în punctul $Q(b,0,0)$ cu $b < a$ . Arătaţi că, pentru a construi ovalul cartezian ce trece prin Q se poate proceda în felul următor :

- Cu centrul în $P_1$ se construieşte un cerc de rază $r_1(\geq b)$ ;
- Cu centrul în $P_2$ se trasează un cerc de rază $r_2 = C/n_2 - (n_1/n_2)r_1$, unde constanta este $C = bn_1 + (a-b)n_2$ . Aceste două cercuri se intersectează în două puncte care aparţin ovalului. Cu diferite valori crescătoare (pas mic) pentru $r_1$ şi cu valorile corespunzătoare pentru $r_2$ se pot obţine mai multe perechi de puncte care aparţin ovalului. Unind aceste puncte din aproape în aproape putem obţine conturul ovalului cartezian . Vârful Q este caracterizat de $r_1 = b$ şi $r_2 = a-b$. Al doilea vârf al ovalului (Q') se poate localiza impunând condiţia $r_2 = r_1 - a$ . Astfel rezultă $r_1 = b(n_1-n_2)/(n_1+n_2) + a(2n_2)/(n_1+n_2)$.

**121**. Să se arate că pentru lentila plan-convexă din figura B.21, caracterizată prin raza de curbură R şi indicele de refracţie n, distanţa focală este dată de formula $f(h,n,R) = R\dfrac{nR + \sqrt{R^2 - n^2h^2} - n\sqrt{R^2-h^2}}{n\sqrt{R^2-h^2} - \sqrt{R^2-n^2h^2}}$. Lentila este plasată în aer ( $n_{aer} = 1$ ).

***Indicaţie:*** *Se „geometrizează" evidenta relaţie dintre unghiuri* $\beta - \alpha + \gamma = \pi/2$*, ţinându-se cont că* $d = R - \sqrt{R^2-h^2}$ .

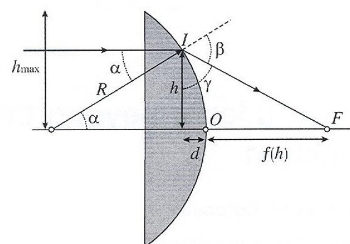



Figura B.21

**122.** Este posibil oare să se realizeze "ochiul de peşte" al lui Maxwell în optica electronică, considerând că electronii ar trebui să se deplaseze într-un câmp electrostatic, în vid ?

*Răspuns: Nu! Din punct de vedere formal, mişcarea unei particule ( electron) într-un câmp de forţe conservative este analoagă propagării luminii ("razei") într-un mediu izotrop, neomogen .Rolul indicelui de refracţie îl joacă viteza v a particulei (vezi formula (45)). Dacă s-ar putea realiza "ochiul de peşte" , viteza v a electronilor ar trebui să aibă forma* $v = v_0(1 + r^2/a^2)^{-1}$ *. Pe de altă parte, legea conservării energiei impune relaţia* $(m/2)v^2 + eV(r) \equiv K$ *.De aici, cu expresia anterioară a lui* $v^2$*, ar rezulta o dependenţă* $V(r)$ *care nu poate satisface ecuaţia* $\Delta V(r) = 0$ *(a lui Laplace).În principiu, pentru ca "ochiul de peşte" electronic să poată fi realizat ar fi necesară o adecvată distribuţie de "sarcină spaţială".*

**123.** Pornind de la formula (16) a curburii unei raze de lumină şi având în vedere analogia dintre mecanica clasică şi optica geometrică (vezi relaţiile (13) şi (44)) să se arate că raza de curbură a traiectoriei unui electron într-un câmp electric se determină cu ajutorul formulei $\rho = -2V/(\vec{N}.\vec{E})$ . Aici $\vec{N}$ este versorul normalei principale la traiectorie iar $\vec{E}$ este intensitatea câmpului electric. Potenţialul electric $V$ este considerat egal cu zero acolo unde viteza electronului este nulă.

***Indicaţie:****Din legea conservării energiei rezultă că* $v^2 = (2e/m)V$*. Prin logaritmare se stabileşte o legătură între* $\ln v$ *şi* $\ln V$ *care se introduce în relaţia* $1/\rho = \vec{N}.\nabla(\ln v)$*. Se mai ţine cont de faptul că* $\vec{E} = -\nabla V$ .

**124.** Ce se poate spune despre energia potenţială V(r) a unui punct material cu energia totală W care se mişcă într-un câmp cu simetrie sferică, ştiind că traiectoria sa este analogă cu cea a unei raze de lumină ce se propagă într-o lentilă Luneburg caracterizată de următoarea dependenţă a indicelui de refracţie:

$n^2(r) = 1 - \frac{r^2 - R^2}{r_1^2}$ , pentru $r \le R$ şi $n^2(r) = 1$ , pentru $r > R$ ? Precizăm că $r_1 < R$ este distanţa de la centrul lentilei la focar (este o „distanţă focală" în interiorul lentilei) iar R este raza lentilei sferice.

***Răspuns:*** *Deoarece indicele de refracţie analog are expresia* $n(r) = (1 - V(r)/W)^{1/2}$ *rezultă că, pentru* $r \le R$ *, energia potenţială trebuie să aibă forma* $V(r) = V_0(r^2/R^2 - 1)$ *iar, pentru* $r > R$ *, ea trebuie să se anuleze. Aici am utilizat notaţia* $V_0 = W(R/r_1)^2$*. Dependenţa V(r) de mai sus este cea din cazul unui oscilator armonic trunchiat. Remarcăm faptul că distanţa focală* $r_1 = R\sqrt{W/V_0}$ *creşte odată cu energia totală W şi tinde spre R (focalizare pe marginea lentilei) când energia totală tinde spre* $V_0$.

# *BIBLIOGRAFIE*


1. S. A. Ahmanov, S. Yu. Nikitin, ***Physical Optics***, Clarendon Press, Oxford, 1997;
2. J. A. Arnaud, ***Beam and Fiber Optics***, Academic Press, New York, 1976;
3. Bai Gui-ru, Guo Guang-can, ***Problems and Solutions on Optics***, World Scientific, Singapore, 1991;
4. V. V. Bianu, ***Optică geometrică***, Editura Tehnică, București, 1962;
5. J. W. Blaker, ***Geometric Optics. The Matrix Theory***, Marcel Dekker, Inc., New York, 1971;
6. M. Born, E. Wolf, ***Principles of Optics***, Pergamon Press, Oxford, 1986;
7. A. Boussié, ***Physique- exercices avec solutions***, Vuibert, Paris, 1984;
8. G. A. Boutry, ***Instrumental Optics***, Hilger, London, 1961;
9. C. Bozan, ***Curs de Optică*** (p. I), Tipografia Universității din Timișoara, 1975;
10. G. G. Brătescu, ***Optica***, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1982;
11. G. Brooker, ***Modern Classical Optics***, Oxford University Press, New York, 2003;
12. W. Brouwer, ***Matrix Methods in Optical Instrument Design***, W. A. Benjamin, Inc. New York, 1964;
13. H. A. Buchdahl, ***Optical Aberration Coefficients***, Oxford University Press, London, 1954; ***An Introduction to Hamiltonian Optics***, Cambridge University Press, 1970;
14. E. J. Butikov, ***Optika***, Izd. Vîssaia școla, Moskva, 1986;
15. G. Chartier, ***Intoduction to Optics***, Springer, Berlin, 2005;
16. A. H. Cherin, ***Introduction to Optical Fibers***, Mc Graw - Hill, New York, 1983;
17. H. Chrétien, ***Calcul des combinaisons optiques***, Masson, Paris, 1959;
18. A. E. Conrady, ***Applied Optics and Optical Design***, Dover Publication, Inc., New York, 1975;
19. S. Cornbleet, ***Microwave Optics***, Academic Press, New York, 1976;
20. F. S. Crawford jr., ***Unde*** (Cursul de Fizică Berkeley, vol.III), Editura Didactică și Pedagogică, București, 1983;
21. René Descartes, ***La Dioptrique***, Oeuvres de Descartes, Vol. VI, C. Adam et P. Tannery (éditeurs), Paris, 1902;
22. F. Desvignes, ***Détection et détecteur de rayonements optiques***, Collection Mesures Physiques, Paris, 1987;
23. R. W. Ditchburn, ***Light***, Dover Publications Inc., New York, 1991;
24. P. Dodoc, ***Calculul și construcția aparatelor optice***. Editura Didactică și Pedagogică, București, 1983;
25. D. O. Dorohoi, ***Optica***, Editura Ștefan Procopiu, Iași, 1995;
26. E. Elbaz, F. Roux, ***Optique matricielle***, Ellipses, Paris, 1989;
27. G. R. Fowles, ***Introduction to Modern Optics,*** Dover Publications, New York, 1975;
28. A. Gerrard, I. M. Burch, ***Introduction to Matrix Methods in Optics***, John Wiley & Sons, New York, 1975;
29. A. Ghatak, K. Thyagarajan, ***Contemporary Optics***, Plenum Press, New Delhi, 1978;
30. R. Grigorovici, ***Curs de optică***, partea I, ***Optica Geometrică***, Universitatea București, 1957;
31. R. D. Guenther, ***Modern Optics***, Wiley, New York, 1990;

32. W. R. Hamilton, *The Mathematical Papers of Sir William Rowan Hamilton*, Vol.I, *Geometrical Optics*, edited by A. W. Conway and J. L. Synge, Cambridge University Press, New York, 1931;
33. O. S. Heavens, R. W. Ditchburn, *Insight into Optics*, Wiley, New York, 1991;
34. E. Hecht, *Optique*, *Cours et Problèmes*, McGraw-Hill, Inc., New York, 1980;
35. E. Hecht, A. Zajac, *Optics*, Addison - Wesley Publ. Comp., Inc., Reading, Mass., 1987;
36. E. Hegedüs, *Introducere în Optică* (I, II), Tipografia Universității din Timișoara,1974;
37. G. Huțanu, *Zigzag în lumea opticii*, Ed. Albatros, București, 1986;
38. M. Herzberger, *Modern Geometrical Optics*, Interscience Publishers, New York, 1968;
39. Christian Huygens, *Traité de la lumière*, Van der Aa, Leiden, 1906, republicat de Gauthier - Villars, Paris, 1992;
40. K. Iizuka, *Engineering Optics*, Springer - Verlag, Berlin, 1985;
41. I. Iova, *Elemente de optică aplicată*, Editura Științifică și Enciclopedică, București, 1977;
42. F. A. Jenkins, H. E. White, *Fundamentals of Optics*, McGraw-Hill, Inc., 1981;
43. M. V. Klein, *Optics*, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1970;
44. M. Kline, I. W. Kay, *Electromagnetic Theory and Geometrical Optics*, John Willey & Sons, Inc., New York, 1965;
45. Yu. A. Kravțov, Yu. I. Orlov, *Geometriceskaia optika neodnorodnîh sred*, Izd. Nauka, Moskva, 1980;
46. E. E. Kriezis și alții, *Electromagnetics and Optics,* World Scientific, Singapore, 1992;
47. M. Lanchenaud, *Instruments d'Optique*, Dunod, Paris, 1976;
48. L. Landau, E. Lifchitz, *Théorie du champ,* Chap. VII, *Propagation de la lumière*, Editions Mir, Moscou, 1966;
49. G. S. Landsberg, *Optica*, prima parte, Editura Tehnică, București, 1958;
50. L. Levi, *Applied Optics, A Guide to Optical Design*, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1968;
51. R. S. Longhurst, *Geometrical and Physical Optics*, Longmans, Green and Co., Ltd., London, 1984;
52. D. J. Lowell, *Optical anecdotes*, SPIE, Washington, 1984;
53. H. Lumbroso, *Optique géométrique et ondulatoire* (98 probèmes resolus), Dunod, Paris, 1996;
54. R. K. Luneburg, *Mathematical Theory of Optics*, University of California Press, Berkeley, 1964;
55. E. Mach, *The Principles of Physical Optics. An Historical and Philosophical Treatment*, Dover Publication, Inc., New York, 1953;
56. D. Marcuse, *Light Transmission Optics*, Van Nostrand Reinhold, New York, 1972;
57. A. Maréchal, *Optique géométrique générale*, în *Handbuch der Physik*, herdansgegebem von S. Flügge, Band XXIV, *Grundlagen der Optik*, Springer - Verlag, Berlin, 1956;
58. L. C. Martin, *Geometrical Optics*, Philosophical Library, Inc., New York, 1956;
59. L. C. Martin, W. T. Welford, *Technical Optics*, Pitman & Sons, Ltd., London, 1966;
60. A. N. Matveev, *Optics,* Mir Publishers, Moskow, 1988;
61. M. May, A-M. Cazabat, *Optique - Cours et problèmes résolues*, Dunod, Paris, 1996;

62. M. May, *Introduction à l'Optique*, Dunod, Paris, 1996;
63. J. R. Meyer - Arendt, *Introduction to Classical and Modern Optics*, Prentice - Hall, Inc., London, 1972;
64. G. C. Moisil, E. Curatu, *Optică, teorie și aplicații*, Editura Tehnică, București, 1986;
65. K. D. Möller, *Optics*, University Science Books, Mill Valley, 1988;
66. G. Nemeș, I. Teodorescu, M. Nemeș, *Optica în spațiul fazelor, teorie și aplicații*, Editura Academiei Române, București, (va apare);
67. Isaac Newton, *Optica*, Editura Academiei Române, București, 1970, în traducerea Prof. Victor Marian;
68. I. Nicoară, *Optică*, Tipografia Universității din Timișoara, 1988;
69. A. Nussbaum, *Geometric Optics*, Addison - Wesley Publ. Co., Inc., Reading, Mass., 1968;
70. G. H. Owyang, *Foundations of Optical Waveguides*, Elsevier, New York, 1981;
71. F. L. Pedrotti, L. S. Pedrotti, *Introduction to Optics*, Prentice-Hall, 1993;
72. J-P. Pérez, *Optique* (*Fondements et applications*), Masson, Paris, 1996;
73. V. Pop, *Optica*, Vol. II, Universitatea "Al. I. Cuza", Iași, partea I, 1983, partea a doua, 1986;
74. I. I. Popescu, *Optica, 1. Optica geometrică*, Tipografia Univ. din București, 1988;
75. I. I. Popescu, E. I. Toader, *Optica*, Ed. Științifică și Enciclopedică, București, 1989;
76. I. M. Popescu, *Teoria electromagnetică macroscopică a luminii*, Editura Științifică și Enciclopedică, București, 1986;
77. J. P. Provost, P. Provost, *Optique, vol.1, Optique et Principe de Fermat, vol.3, Exercices et problèmes d'optique géometrique*, Cedic/Fernand Nathan, Paris, 1980;
78. V. Ronchi, *The Nature of Light, an Historical Survey*, Harvard University Press, 1970;
79. B. Rossi, *Optics*, Addison-Wesley Publishing Company, Reading, 1962;
80. M. P. Silverman, *Waves and grains (Reflections on Light and Learning)*, Princeton University Press, Princenton, 1998;
81. D. Sivoukhine, *Cours de Physique Générale*, tome IV, *Optique*, première partie, Editions Mir, Moscou, 1984;
82. F. G. Smith, J. H. Thomson, *Optics*, Wiley, New York, 1988;
83. F. G. Smith, T. A. King, *Optics and Photonics (An Introduction)*, Wiley&Sons,Chichester, 2000;
84. M. I. Sobel, *Light*, The Univ. of Chicago Press, 1987;
85. A. Sommerfeld, *Lectures on Theoretical Physics*, Vol. IV, *Optics*, Academic Press Inc., New York, 1954;
86. O. N. Stavroudis, *The Optics of Rays, Wavefronts and Caustics*, Academic Press, New York and London, 1972;
87. P. Ștețiu, *Optica 1, Optica Geometrică*, Tipografia Universității din Cluj-Napoca, 1987;
88. J. L. Synge, *Geometrical Optics, An Introduction to Hamilton's Method*, Cambridge University Press, 1962;
89. E. I. Toader, *Aparate optice*, Ed. Științifică, București, 1995;
90. R. Țițeica, I. I. Popescu, *Fizica Generală*, Vol. II, Editura Tehnică, București, 1973;
91. F. Uliu, *Optică și Spectroscopie*, partea I, *Optica Geometrică*, Tipografia Universității din Craiova, 1973; *Culegere de probleme de optică*, Tipografia Universității din Craiova, 1979;
92. F. Uliu, *Curcubeul - De la mit la adevăr*, Editura SITECH, Craiova, 1994;

93. F. Uliu, *Istoria curcubeului - de la Noe la Mie*, Editurile Emia (Deva) și Universitaria (Craiova), 2005;
94. F. Uliu, *Probleme alese de fizică, vol.II* (*Optică și relativitate*), Ed. Radical, Craiova, 1997;
95. H. G. Unger, *Planar Optical Waveguides and Fibres*, Oxford Univ. Press, 1980;
96. I. Ursu, *Optica*, Litografia Universității din Cluj, Cluj, 1953;
97. M. Young, *Optics and Lasers*, Fifth Edition, Springer, Berlin, 2000;
98. W. T. Welford, *Geometrical Optics*, North Holland Publ., Co., Amsterdam, 1962; *Aberations of the Symetrical Optical Systems*, Academic Press, London, 1974;
99. H. G. Zimmer, *Geometrical Optics*, Springer - Verlag, Berlin, 1970;
100. * * * *Sbornic zadaci po obșcemu kursu fiziki (Optica)*, pod redacția D. V. Sivoukhina, Izd. Nauka, Moskva, 1977;
101. * * * *Melles Griot, Optics Guide*, 5, 1990.